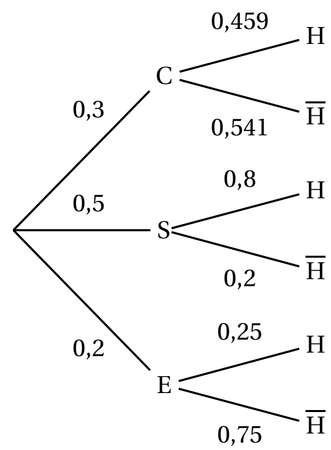
Corrigé S Antilles-Guyane 19 juin 2018

EXERCICE 1 **5 points**

COMMUN À TOUS LES CANDIDATS

Partie A

1. Arbre pondéré complet :



2. On a, d'après l'arbre pondéré : $P(C \cap H) = 0,3 \times 0,459 = 0,1377$.
3. Les événements C, S et E formant une partition de l'univers, la formule des probabilités totales donne :

$$\begin{aligned} P(H) &= P(C \cap H) + P(S \cap H) + P(E \cap H) \\ &= 0,1377 + 0,5 \times 0,8 + 0,2 \times 0,25 \\ &= 0,5877 \end{aligned}$$

4. Il s'agit ici de calculer $P_H(S)$. Par définition :

$$\begin{aligned} p_H(S) &= \frac{P(S \cap H)}{P(H)} \\ &= \frac{0,5 \times 0,8}{0,5877} \\ &\approx 0,681 \text{ à } 10^{-3} \text{ près.} \end{aligned}$$

Partie B

1. D'après le cours, on sait que lorsque une variable aléatoire X suit la loi normale d'espérance μ et d'écart-type σ, on a $P(\mu - 2\sigma \leqslant X \leqslant \mu + 2\sigma) = 0,954$. Ici $\mu = 4000$ et $\sigma = 300$ donc

$$\begin{aligned} P(3400 \leqslant X \leqslant 4600) &= P(4000 - 2 \times 300 \leqslant X \leqslant 4000 + 2 \times 300) \\ &= 0,954 \end{aligned}$$

Remarque : on pouvait également calculer directement à la machine.

2. À l'aide de la calculatrice, à 10^{-3} près :

$$P(X \geqslant 4500) \approx 0,048.$$

Partie C

En supposant que la parcelle comporte suffisamment d'arbres, on peut assimiler le comptage des sapins à un tirage avec remise.
La taille de l'échantillon est $n = 200$, la proportion supposée de sapins est $p = 0,5$.
On a :

- $n \geqslant 30$,
- $np = 100 \geqslant 5$,
- $n(1-p) = 100 \geqslant 5$.

Les conditions sont réunies pour utiliser l'intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95 %. En notant I cet intervalle, et en arrondissant les bornes à 10^{-2} près :

$$\mathrm{I} = \left[p - 1,96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\ ;\ p + 1,96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\right] = [0,43\ ;\ 0,57].$$

La fréquence observée de sapins dans l'échantillon est $f = \dfrac{106}{200} = 0,53$.
$f \in \mathrm{I}$, donc il n'y a pas lieu de remettre en cause l'affirmation de l'exploitant.

EXERCICE 2 **5 points**

COMMUN À TOUS LES CANDIDATS

1. • Les plans (EFG) et (ABC) sont parallèles, car s'appuyant sur deux faces opposées du cube.
   • Le plan (BDL) coupe donc les plans (EFG) et (ABC) selon deux droites parallèles :
   — l'intersection du plan (BDL) et du plan (ABC) est la droite (BD) ;
   — l'intersection du plan (BDL) et du plan (EFG) est la droite (LM) ; en effet :
   — par définition M $\in$ (EH), or (EH) $\subset$ (EFG) donc M $\in$ (EFG) et, toujours par définition M $\in$ (BDL) ;
   — L $\in$ (FE) or (FE) $\subset$ (EFG) donc L $\in$ (EFG) et il est évident que L $\in$ (BDL).
   Les points L et M sont deux points distincts, appartenant chacun à la fois aux plans (BDL) et (EFG). L'intersection de ces deux plans est donc la droite (BL).
   Le théorème « de l'étagère » permet alors de conclure que les droites (LM) et (BD) sont parallèles.

2. On a F(6 ; 0 ; 6) et E(0 ; 0 ; 6). En notant L$(x\ ;\ y\ ;\ z)$, l'égalité vectorielle $\overrightarrow{\mathrm{FL}} = \frac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{FE}}$ équivaut à :

$$\left\{\begin{array}{rcl} x-6 &=& \frac{2}{3}(0-6) \\ y &=& \frac{2}{3}(0-0) \\ z-6 &=& \frac{2}{3}(6-6)\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} x-6 &=& -4 \\ y &=& 0 \\ z-6 &=& 0\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} x &=& 2 \\ y &=& 0 \\ z &=& 6\end{array}\right.$$

   ce qu'il fallait démontrer.

3. **a.** La droite (BL) passe par B(6 ; 0 ; 0) et a pour vecteur directeur $\overrightarrow{\mathrm{BL}}(-4\ ;\ 0\ ;\ 6)$. Une représentation paramétrique de cette droite est donc :

$$\left\{\begin{array}{rcl} x &=& 6-4t \\ y &=& 0 \quad (t \in \mathbb{R}) \\ z &=& 6t\end{array}\right.$$

   b. Le point S appartient à la droite (BL), il existe donc un réel t tel que S$(6-4t\ ;\ 0\ ;\ 6t)$. De plus le point S appartient au plan (AJK) qui a pour équation $x = 0$, on a donc $6 - 4t = 0 \iff t = \frac{3}{2} \iff 6t = 0$. Les coordonnées du point S sont donc bien égales à (0 ; 0 ; 9).

4. **a.** Le plan (BDL) a pour base $(\overrightarrow{BD}\,;\overrightarrow{BL}$.
   - $\overrightarrow{BD}(-6\,;\,6\,;\,0)$ donc $\vec{n}\cdot\overrightarrow{BD} = 3\times(-6)+3\times 6+2\times 0 = 0$ et $\vec{n}\perp\overrightarrow{BD}$;
   - $\overrightarrow{BL}(-4\,;\,0\,;\,6)$ donc $\vec{n}\cdot\overrightarrow{BL} = 3\times(-4)+3\times 0+2\times 6 = 0$ et $\vec{n}\perp\overrightarrow{BL}$.

   Le vecteur $\vec{n}$ est orthogonal à deux vecteurs formant une base du plan (BDL), il est donc normal à ce plan.

   b. Le vecteur $\vec{n}(3;3;2)$ est normal au plan (BDL), une équation cartésienne de ce plan est donc $3x+3y+2z+d=0$, où d est un réel à déterminer. B(6 ; 0 ; 0) $\in$ (BDL) donc :

$$3\times 6+3\times 9+2\times 0+d = 0 \iff 18+d=0 \iff d=-18.$$

   Une équation cartésienne du plan (BDL) est donc bien $3x+3y+2z-18=0$.

   c. M $\in$ (EH), il existe donc un réel s tel que M$(0;s;6)$. De plus M $\in$ (BDL) donc :

$$3\times 0+3\times s+2\times 6-18=0 \iff 3s-6=0 \iff s=2.$$

   Les coordonnées du point M sont donc (0 ; 2 ; 6).

5. Prenons comme base du tétraèdre le triangle rectangle ELM et comme hauteur le segment [SE]. On a :
   - EL = 2 et EM = 2 donc le triangle rectangle ELM a pour aire $\frac{1}{2}\times 2\times 2 = 2$;
   - ES = 3.

   Le tétraèdre SELM a donc pour volume (en mètres cubes) :

$$V = \frac{1}{3}\times 2\times 3 = 2.$$

6. Le triangle SEL est rectangle en E donc : $\tan\left(\widehat{SLE}\right) = \dfrac{ES}{EL} = \dfrac{3}{2}$. À l'aide de la calculatrice on obtient que $\widehat{SLE}\approx 56{,}31^{o}$. La contrainte est donc respectée.

EXERCICE 3 — 5 POINTS

COMMUN À TOUS LES CANDIDATS

Partie A

1. Pour tout réel x on a $-1\leqslant\cos x\leqslant 1$ donc $-1\leqslant-\cos x\leqslant 1$. On a également $-1\leqslant\sin x\leqslant 1$, par conséquent :

$$-1-1+1\leqslant-\cos x+\sin x+1\leqslant 1+1+1 \iff -1\leqslant-\cos x+\sin x+1\leqslant 3.$$

   En multipliant membre à membre le dernier encadrement par e^{-x} (qui est strictement positif) on obtient alors :

$$-e^{-x}\leqslant f(x)\leqslant 3e^{-x}.$$

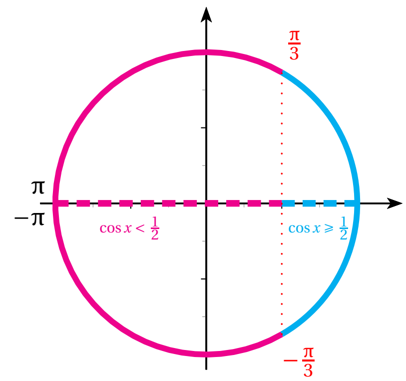
2. On a $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x}=0$. Comme $-e^{-x}\leqslant f(x)\leqslant 3e^{-x}$, le théorème « des gendarmes » permet alors de conclure que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$.

3. Par dérivation d'un produit :

$$\begin{aligned}
f'(x) &= e^{-x}(-(-\sin x)+\cos x)+\left(-e^{-x}\right)(-\cos x+\sin x+1)\\
&= e^{-x}(\sin x+\cos x)+e^{-x}(\cos x-\sin x-1)\\
&= e^{-x}(\sin x+\cos x+\cos x-\sin x-1)\\
&= e^{-x}(2\cos x-1).
\end{aligned}$$

4. **a.**

Pour tout réel x, $e^{-x} > 0$ donc $f'(x)$ est du même signe que $2\cos x - 1$. Sur l'intervalle $[-\pi;\pi]$, et en s'aidant d'un cercle trigonométrique :



$$\begin{aligned} 2\cos x - 1 \geqslant 0 &\iff \cos x \geqslant \frac{1}{2} \\ &\iff -\frac{\pi}{3} \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{3}. \end{aligned}$$

Par conséquent :
- sur $\left[-\pi\,;\,-\frac{\pi}{3}\right[$, $f'(x) < 0$;
- sur $\left]-\frac{\pi}{3}\,;\,-\frac{\pi}{3}\right]$, $f'(x) > 0$;
- sur $\left]\frac{\pi}{3}\,;\,\pi\right]$, $f'(x) < 0$;
- en $-\frac{\pi}{3}$ et $\frac{\pi}{3}$, $f'(x) = 0$.

5. On déduit de la question précédente que :
- sur $\left[-\pi\,;\,-\frac{\pi}{3}\right[$, f est décroissante ;
- sur $\left]-\frac{\pi}{3}\,;\,-\frac{\pi}{3}\right]$, f est croissante ;
- sur $\left]\frac{\pi}{3}\,;\,\pi\right]$, f est décroissante.

Partie B

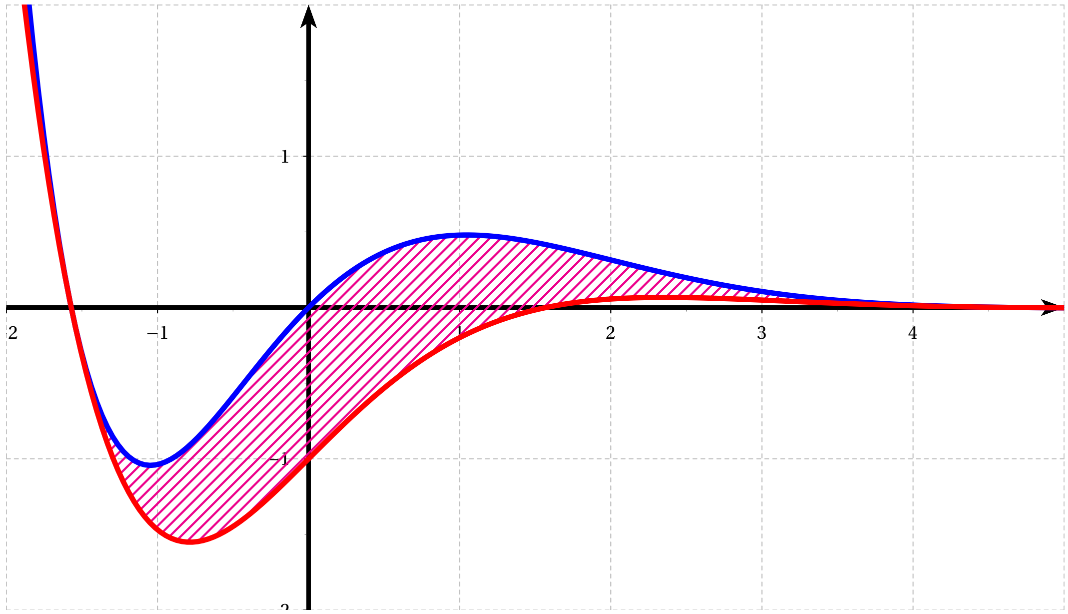
1. Pour tout réel x :

$$\begin{aligned} f(x) - g(x) &= e^{-x}(-\cos x + \sin x + 1) - \left(-e^{-x}\right)\cos x \\ &= e^{-x}(-\cos x + \sin x + 1 + \cos x) \\ &= e^{-x}(\sin x + 1). \end{aligned}$$

Or, pour tout réel x :
- $e^{-x} > 0$,
- $-1 \leqslant \sin x \leqslant 1$ donc $\sin x + 1 \geqslant 0$.

On a donc, pour tout réel x, $f(x) - g(x) \geqslant 0$, ce qui signifie que la courbe $\mathscr{C}_f$ est au dessus de la courbe $\mathscr{C}_g$.

2. a. Domaine $\mathscr{D}$ hachuré :



3. Sur $\mathbb{R}$, a fortiori sur $\left[-\frac{\pi}{2} ; \frac{3\pi}{2}\right]$ la courbe $\mathscr{C}_f$ est au dessus de la courbe $\mathscr{C}_g$, l'aire $\mathscr{A}$ du domaine $\mathscr{D}$ est donc donnée, en unités d'aire, par :

$$\begin{aligned}
\mathscr{A} &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} f(x) - g(x)\,\mathrm{d}x \\
&= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \mathrm{e}^{-x}(\sin x + 1)\,\mathrm{d}x \\
&= \Big[\mathrm{H}(x)\Big]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \\
&= \mathrm{H}\left(\frac{3\pi}{2}\right) - \mathrm{H}\left(-\frac{\pi}{2}\right) \\
&= \left(-\frac{\cos\left(\frac{3\pi}{2}\right)}{2} - \frac{\sin\left(\frac{3\pi}{2}\right)}{2} - 1\right)\mathrm{e}^{-\frac{3\pi}{2}} - \left(-\frac{\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)}{2} - \frac{\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)}{2} - 1\right)\mathrm{e}^{-\left(-\frac{\pi}{2}\right)} \\
&= -\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-\frac{3\pi}{2}} + \frac{1}{2}\mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}}
\end{aligned}$$

L'unité graphique est de 2 cm, l'unité d'aire est donc de 4 cm^2. Par conséquent, une valeur approchée de l'aire du logo est, à 10^{-2} près :

$$4 \times \left(-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-\frac{3\pi}{2}} + \frac{1}{2}\mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}}\right) \approx 9{,}6\ \mathrm{cm}^2.$$

EXERCICE 4 **5 POINTS**

CANDIDATS N'AYANT PAS SUIVI L'ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

1. L'effectif de cétacés au 31 octobre 2017 est de 3000+80, c'est-à-dire 3080. Entre le 1$^{\text{er}}$ novembre et le 31 mai, une baisse de 5 % a lieu, l'effectif au 1$^{\text{er}}$ juin 2018 est donc :

$$u_1 = 3\,080 \times 0{,}95 = 2\,926.$$

2. En généralisant, on a, pour tout entier naturel n :

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= (u_n + 80) \times 0{,}95 \\ &= 0{,}95u_n + 80 \times 0{,}95 \\ &= 0{,}95u_n + 76. \end{aligned}$$

3. Formule à entrer dans la cellule C2 : = 0.95*B2 + 76.

4. **a.** Démontrons par récurrence que, pour tout entier naturel n, $u_n \geqslant 1\,520$.

- **Initialisation**. On a $u_0 = 3\,000 \geqslant 1\,520$, la propriété est donc vraie pour $n = 0$.
- **Hérédité.** Supposons qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $u_n \geqslant 1\,520$. Démontrons alors que $u_{n+1} \geqslant 1\,520$.
  Par hypothèse de récurrence, $u_n \geqslant 1\,520$, donc, en multipliant membre à membre par 0,95 :
  $$0{,}95u_n \geqslant 0{,}95 \times 1\,520$$
  puis, en ajoutant membre à membre 76 :
  $$0{,}95u_n + 76 \geqslant 0{,}95 \times 1\,520 + 76$$
  ce qui équivaut à :
  $$u_{n+1} \geqslant 1520$$
  ce qu'il fallait démontrer. La propriété est donc héréditaire.
- **Conclusion.** Pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_n \geqslant 1\,520$.

b. Soit $n \in \mathbb{N}$, alors :

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= 0{,}95u_n + 76 - u_n \\ &= -0{,}05u_n + 76. \end{aligned}$$

D'après la question précédente, $u_n \geqslant 1\,520$, donc $-0{,}05u_n \leqslant -0{,}05 \times 1\,520$, c'est-à-dire $-0{,}05u_n \leqslant -76$, par conséquent, $-0{,}05u_n + 76 \leqslant 0$, c'est-à-dire $u_{n+1} - u_n \leqslant 0$, ce qui prouve que la suite (u_n) est décroissante.

c. La suite (u_n) est décroissante, minorée, elle est donc convergente.

5. **a.** Soit $n \in \mathbb{N}$, alors :

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= u_{n+1} - 1\,520 \\ &= 0{,}95u_n + 76 - 1\,520 \\ &= 0{,}95u_n - 1\,444 \\ &= 0{,}95\left(u_n - \frac{1\,444}{0{,}95}\right) \\ &= 0{,}95\,(u_n - 1\,520) \\ &= 0{,}95v_n. \end{aligned}$$

La suite (v_n) est donc géométrique de raison 0,95.
Son premier terme est $v_0 = u_0 - 1\,520 = 1\,480$.

b. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $v_n = 1\,480 \times 0{,}95^n$. Et comme $v_n = u_n - 1\,520$, on en déduit que $u_n = v_n + 1\,520$, ce qui donne bien

$$u_n = 1\,480 \times 0{,}95^n + 1\,520.$$

c. $-1 < 0{,}95 < 1$, donc $\lim\limits_{n \to +\infty} 0{,}95^n = 0$, on en déduit, par opérations sur les limites que $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 1\,520$.

6. Algorithme complété :

```
n ← 0
u ← 3000
Tant que u ⩾ 2000 :
    n ← n + 1
    u ← 0,95 ∗ u + 76
Fin de Tant que
```

7. La limite de la suite (u_n) est 1 520 qui est inférieur à 2000, donc la réserve fermera un jour. Pour déterminer l'année de fermeture, on peut programmer l'algorithme précédent, ou résoudre l'inéquation :

$$\begin{aligned}
u_n \leqslant 2\,000 &\iff 1\,480 \times 0{,}95^n + 1\,520 \leqslant 2\,000\\
&\iff 1\,480 \times 0{,}95^n \leqslant 480\\
&\iff 0{,}95^n \leqslant \frac{480}{1\,480}\\
&\iff n\ln(0{,}95) \leqslant \ln\left(\frac{480}{1\,480}\right)\\
&\iff n \geqslant \frac{\ln\left(\frac{480}{1480}\right)}{\ln(0{,}95)}
\end{aligned}$$

À la calculatrice, $\dfrac{\ln\left(\frac{480}{1480}\right)}{\ln(0{,}95)} \approx 21{,}95$. C'est donc la 22e année que la réserve fermera, soit en 2039.

EXERCICE 4 — 5 POINTS

CANDIDATS AYANT SUIVI L'ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

1. Soit $n \in \mathbb{N}$.

- Chaque année, 65 % des possesseurs de la carte de pêche libre achètent de nouveau une carte de pêche libre, et 45 % de possesseurs de la carte de pêche avec quota achètent une carte de pêche libre l'année suivante. En supposant qu'il n'y a ni départ ni arrivée de nouveaux pêcheurs, on a donc :
$$\ell_{n+1} = 0{,}65\ell_n + 0{,}45q_n.$$
- Le nombre de pêcheurs étant constant d'année en année : $\ell_{n+1} + q_{n+1} = \ell_n + q_n$, donc :
$$q_{n+1} = \ell_n + q_n - \ell_{n+1} = \ell_n + q_n - 0{,}65\ell_n - 0{,}45q_n = 0{,}35\ell_n + 0{,}55q_n.$$
- On a donc :
$$\begin{aligned}
\mathrm{P}_{n+1} &= \begin{pmatrix}\ell_{n+1}\\ q_{n+1}\end{pmatrix}\\
&= \begin{pmatrix}0{,}65\ell_n + 0{,}45q_n\\ 0{,}35\ell_n + 0{,}55q_n\end{pmatrix}\\
&= \begin{pmatrix}0{,}65 & 0{,}45\\ 0{,}35 & 0{,}55\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\ell_n\\ q_n\end{pmatrix}\\
&= \mathrm{MP}_n
\end{aligned}$$

2. 2019=2017+2, il s'agit donc de calculer P_2 :

$$\mathrm{P}_2 = \mathrm{MP1} = \mathrm{MMP}_0 = \mathrm{M}^2\mathrm{P}_0.$$

À l'aide de la calculatrice :

$$\mathrm{P}_2 = \begin{pmatrix} 0{,}56 \\ 0{,}44 \end{pmatrix}$$

En 2019, la proportion de pêcheurs achetant une carte de pêche avec quota est donc de 0,44.

3. Notons I la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

- TQ = I et QT = I, la matrice Q est donc inversible et son inverse est la matrice T.
- D = TMQ donc, en multipliant à gauche par Q et à droite par Q^{-1} :

$$\mathrm{QDQ}^{-1} = \mathrm{QTMQQ}^{-1} = (\mathrm{QT})\mathrm{M}(\mathrm{QQ}^{-1}) = \mathrm{IMI} = \mathrm{M}.$$

- Montrons maintenant par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $\mathrm{M}^n = \mathrm{QD}^n\mathrm{Q}^{-1}$.
  — **Initialisation.** $\mathrm{M}^1 = \mathrm{M} = \mathrm{QDQ}^{-1} = \mathrm{QD}^1\mathrm{Q}^{-1}$. La propriété est donc vraie pour $n = 1$.
  — **Hérédité.** Supposons qu'il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $\mathrm{M}^n = \mathrm{QD}^n\mathrm{Q}^{-1}$. Montrons alors que $\mathrm{M}^{n+1} = \mathrm{QD}^{n+1}\mathrm{Q}^{-1}$.
  On a

$$\mathrm{M}^{n+1} = \mathrm{M}^n\mathrm{M} = \mathrm{QD}^n\mathrm{Q}^{-1} \times \mathrm{QDQ}^{-1} = \mathrm{QD}^n\left(\mathrm{Q}^{-1}\mathrm{Q}\right)\mathrm{DQ}^{-1} = \mathrm{Q}(\mathrm{D}^n\mathrm{D})\mathrm{Q}^{-1} = \mathrm{QD}^{n+1}\mathrm{Q}^{-1}.$$

  La propriété est donc héréditaire.
  — **Conclusion.** Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $\mathrm{M}^n = \mathrm{QD}^n\mathrm{Q}^{-1}$.

4. a. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathrm{P}_{n+1} = \mathrm{MP}_n$, la suite de matrices (P_n) est donc géométrique de raison M. Une récurrence immédiate prouve alors que $\mathrm{P}_n = \mathrm{M}^n\mathrm{P}_0$.

b. Soit $n \in \mathbb{N}$, alors :

$$\begin{aligned} \mathrm{P}_n &= \mathrm{M}^n\mathrm{P}_0 \\ &= \frac{1}{16}\begin{pmatrix} 9+7\times 0{,}2^n & 9-9\times 0{,}2^n \\ 7-7\times 0{,}2^n & 7+9\times 0{,}2^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0{,}4 \\ 0{,}6 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{16}\begin{pmatrix} 3{,}6+2{,}8\times 0{,}2^n+5{,}4-5{,}4\times 0{,}2^n \\ 2{,}8-2{,}8\times 0{,}2^n+4{,}2+5{,}4\times 0{,}2^n \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{16}\begin{pmatrix} 9-2{,}6\times 0{,}2^n \\ 7+2{,}6\times 0{,}2^n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Comme $\mathrm{P}_n = \begin{pmatrix} \ell_n \\ q_n \end{pmatrix}$, on en déduit que :

$$\begin{aligned} \ell_n &= \frac{1}{16}\left(9-2{,}6\times 0{,}2^n\right) \\ &= \frac{9}{16} - \frac{1}{16}\times 2{,}6\times 0{,}2^n \\ &= \frac{9}{16} - \frac{13}{80}\times 0{,}2^n \end{aligned}$$

5. • La suite (ℓ_n) est croissante, en effet, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} \ell_{n+1} - \ell_n &= \left(\frac{9}{16} - \frac{13}{80}\times 0{,}2^{n+1}\right) - \left(\frac{9}{16} - \frac{13}{80}\times 0{,}2^n\right) \\ &= \frac{13}{80}\left(-0{,}2^{n+1} + 0{,}2^n\right) \\ &= \frac{13}{80}\times 0{,}2^n\,(-0{,}2+1) \\ &= \frac{13}{80}\times 0{,}2^n\times 0{,}8 \\ &> 0 \end{aligned}$$

- $-1 < 0{,}2 < 1$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} 0{,}2^n = 0$. On en déduit, par opérations sur les limites, que $\lim\limits_{n \to +\infty} \ell_n = \dfrac{9}{16}$.
- La suite (ℓ_n) est croissante, de limite $\dfrac{9}{16}$, donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leqslant \frac{9}{16}$. Or $\frac{9}{16} < 0{,}6$, on peut donc conclure que la proportion de pêcheurs achetant la carte de pêche libre ne dépassera jamais 60 %.