

Corrigé du baccalauréat S Antilles-Guyane 6 septembre 2018

EXERCICE 1

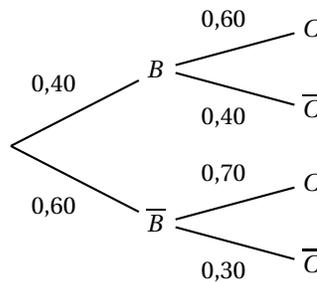
5 points

COMMUN À TOUS LES CANDIDATS

Les trois parties de cet exercice sont indépendantes.

Partie A

1.



2. Il faut calculer $p(C)$; d'après la loi des probabilités totales, on a :

$$p(C) = p(B \cap C) + p(\bar{B} \cap C) = p(B) \times p_B(C) + p(\bar{B}) \times p_{\bar{B}}(C) = 0,4 \times 0,6 + 0,6 \times 0,7 = 0,24 + 0,42 = 0,66.$$

3. Il faut calculer $p_C(B) = \frac{p(C \cap B)}{p(C)} = \frac{0,24}{0,66} \approx 0,3636$ soit environ 0,364.

Partie B

1. Il faut trouver $P(X_1 > 247,5)$ soit $P(247,5 < X_1 < 251) + P(X_1 > 251) = P(247,5 < X_1 < 251) + 0,5$.
La calculatrice donne $P(247,5 < X_1 < 251) \approx 0,460$, d'où $P(X_1 > 247,5) \approx 0,960$.

2. Considérons la variable $Y = \frac{X_2 - \mu_2}{\sigma} = \frac{X_2 - \mu_2}{2}$: celle-ci suit la loi normale centrée réduite.

Il faut trouver μ_2 telle que :

$$P(X_2 > 247,5) = 0,98 \text{ soit } P(247,5 < X_2 < \mu_2) + 0,5 = 0,98 \iff P(247,5 < X_2 < \mu_2) = 0,48 \iff$$

$$P(247,5 - \mu_2 < X_2 - \mu_2 < 0) = 0,48 \iff P\left(\frac{247,5 - \mu_2}{2} < \frac{X_2 - \mu_2}{2} < \frac{\mu_2 - 247,5}{2}\right) = 0,96 \iff$$

$$P\left(\frac{247,5 - \mu_2}{2} < \frac{X_2 - \mu_2}{2} < \frac{\mu_2 - 247,5}{2}\right) = 0,96.$$

$$\text{Donc } P\left(\frac{247,5 - \mu_2}{2} < Y < \frac{\mu_2 - 247,5}{2}\right) = 0,96 \text{ ou encore}$$

$$2P\left(Y < \frac{\mu_2 - 247,5}{2}\right) - 1 = 0,96 \iff 2P\left(Y < \frac{\mu_2 - 247,5}{2}\right) = 1,96 \iff$$

$$P\left(Y < \frac{\mu_2 - 247,5}{2}\right) = 0,98.$$

$$\text{La calculatrice donne } \frac{\mu_2 - 247,5}{2} \approx 2,054 \iff \mu_2 - 247,5 \approx 4,108 \iff \mu_2 \approx 251,608.$$

Partie C

On a donc $n = 256$ avec une probabilité de la dirigeante d'avoir 98 % de produits conforme, soit $p = 0,98$.

Les conditions :

- $n \geq 30$;

- $n \times p = 256 \times 0,98 = 250,88 \geq 5$;
- $n(1-p) = 256 \times 0,02 = 5,12 \geq 5$ sont vérifiées. On peut donc construire un intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95 % :

$$I_{256} = \left[0,98 - 1,96 \sqrt{\frac{0,98 \times 0,02}{256}} ; 0,98 + 1,96 \sqrt{\frac{0,98 \times 0,02}{256}} \right] \text{ soit } I_{256} \approx [0,96285 ; 0,99715].$$

On peut prendre $I_{256} \approx [0,962 ; 0,998]$.

Or la fréquence de produits conformes est $\frac{248}{256} = 0,96875 \in I_{256}$.

Ce contrôle ne remet pas en cause l'affirmation de la dirigeante.

EXERCICE 2

6 points

COMMUN À TOUS LES CANDIDATS

Partie A

Soit f_2 la fonction définie sur \mathbb{R} par $f_2(x) = (x+2)e^{-x}$.

1. On peut conjecturer que la limite de f_2 en $-\infty$ est $-\infty$ et que la limite de f_2 en $+\infty$ est 0.
2. On conjecture le tableau de variations de f_2 à l'aide du graphique :

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$	$\approx 2,7$	0

3. Voir le tracé de la tangente sur l'annexe. Une équation de T_2 doit être $y = -x + 2$.
4. Voir l'annexe.

Partie B

Pour tout réel m , on note f_m la fonction définie sur \mathbb{R} par $f_m(x) = (x+m)e^{-x}$.

1. • Quel que soit le réel m , $\lim_{x \rightarrow -\infty} x+m = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-x} = +\infty$, d'où par produit de limites $\lim_{x \rightarrow -\infty} f_m(x) = -\infty$.
 • $f_m(x) = xe^{-x} + me^{-x}$. On sait que $\lim_{x \rightarrow +\infty} xe^{-x} = 0$ et on a $\lim_{x \rightarrow +\infty} me^{-x} = 0$, d'où par somme de limites $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_m(x) = 0$.
2. On a par dérivée d'un produit : $f'_m(x) = 1e^{-x} - (x+m)e^{-x} = e^{-x}(1-x-m)$.
3. Comme $e^{-x} > 0$, quel que soit le réel x , le signe de $f'_m(x)$ est celui de $1-x-m$.
 Or $1-x-m > 0 \iff x < 1-m$:
 - sur $] -\infty ; 1-m]$, la fonction f_m est strictement croissante de $-\infty$ à $f_m(1-m) = (1-m+m)e^{-(1-m)} = e^{m-1}$.
 - $1-x-m < 0 \iff x > 1-m$: sur $] 1-m ; +\infty]$, la fonction f_m est strictement décroissante de e^{m-1} à 0.
4. a. On sait qu'une équation de T_m est $y - f_m(0) = f'_m(0)(x-0)$.
 Or $f_m(0) = m$ et $f'_m(0) = 1-m$.
 Donc une équation de T_m est $y - m = x(1-m)$ ou $y = (1-m)x + m$.
 b. On voit facilement que si $x = 1$, alors $y = 1$: toutes les droites T_m contiennent le point de coordonnées $(1; 1)$.

5. On étudie le signe de $f_m(x)$ pour tout réel x .

Pour tout x , $e^{-x} > 0$ donc $f_m(x)$ est du signe de $x + m$:

$$f_m(x) < 0 \text{ sur }]-\infty ; -m[, f_m(x) > 0 \text{ sur }]-m ; +\infty[\text{ et } f_m(-m) = 0.$$

6. a. $\int_{-2}^x f_2(t) dt = [F_2(t)]_{-2}^x = F_2(x) - F_2(-2) = -(x+3)e^{-x} - [-(2+3)e^{-(-2)}] = -(x+3)e^{-x} + e^2$

b. On a $-(x+3)e^{-x} = -xe^{-x} - 3e^{-x}$. Or

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} xe^{-x} = 0 \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} 3e^{-x} = 0, \text{ donc par somme de limites } \lim_{x \rightarrow +\infty} -(x+3)e^{-x} = 0 \text{ et}$$

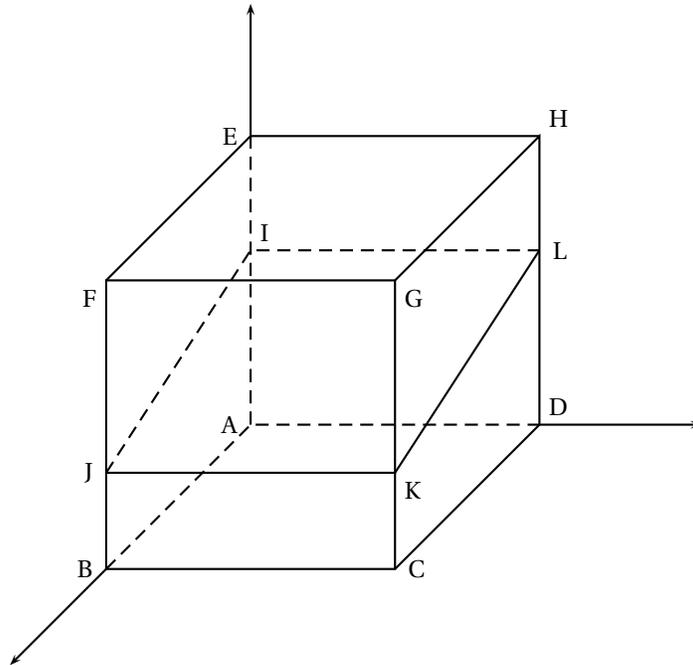
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_{-2}^6 f_2(t) dt = e^2.$$

La limite de l'aire de la surface limitée par \mathcal{C}_2 , l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = -2$ et $x = t$ quand t tend vers $+\infty$ est égale à e^2 .

EXERCICE 3

4 points

COMMUN À TOUS LES CANDIDATS



On note \mathcal{P}_1 le plan d'équation $4x + 15z - 9 = 0$.

1. Les coordonnées de I vérifient : $4x + 15z - 9 = 0$, $x = 0$ et $y = 0$, donc $z = \frac{9}{15} = \frac{3}{5}$. $I(0 ; 0 ; \frac{3}{5})$.

Les coordonnées de J vérifient : $4x + 15z - 9 = 0$, $x = 1$ et $y = 0$, donc $z = \frac{5}{15} = \frac{1}{3}$. $J(0 ; ; 1 ; \frac{1}{3})$.

2. Volume du prisme IJKLDCBA : la base AIJB a une aire $\frac{AI+BJ}{2} \times AB = \frac{\frac{3}{5} + \frac{1}{3}}{2} \times 1 = \frac{14}{15} \times \frac{1}{2} = \frac{7}{15}$.

Comme la hauteur est égale à 1, le volume est aussi égal à $\frac{7}{15}$.

Comme le cube a une aire égale à 1, l'autre prisme a un volume égal à :

$$1 - \frac{7}{15} = \frac{8}{15}$$

3. \mathcal{P}_2 est parallèle à \mathcal{P}_1 donc une de ses équations est de la forme : $4x + 15z + k = 0$.

Soit N le point d'intersection de \mathcal{P}_2 avec l'arête [BF].

M est un point de [EI], donc sa cote z vérifie : $\frac{3}{5} \leq z \leq 1$.

Les coordonnées de M vérifient : $4x + 15z + k = 0$, $x = 0$ et $y = 0$, donc $z = -\frac{k}{15}$. $M\left(0; 0; -\frac{k}{15}\right)$.

Les coordonnées de N vérifient : $4x + 15z + k = 0$, $x = 1$ et $y = 0$, donc $z = -\frac{k+4}{15}$. $N\left(0; 0; -\frac{k+4}{15}\right)$.

Le trapèze AMNB a une aire égale à :

$$\frac{AM + BN}{2} \times AB = \frac{-\frac{k}{15} - \frac{k+4}{15}}{2} \times 1 = -\frac{2k+4}{15} \times \frac{1}{2} = -\frac{k+2}{15}.$$

Comme la hauteur est égale à 1, le volume est aussi égal à $-\frac{k+2}{15}$.

On veut que ce volume soit égal à $\frac{1}{2}$, d'où l'équation :

$$-\frac{k+2}{15} = \frac{1}{2} \iff -2k - 4 = 15 \iff 2k = -19 \iff k = -\frac{19}{2}.$$

Une équation de \mathcal{P}_2 est donc $4x + 15z - \frac{19}{2} = 0$.

EXERCICE 4

5 points

CANDIDATS N'AYANT PAS SUIVI L'ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$, et pour tout entier naturel n ,

$$u_{n+1} = e \times \sqrt{u_n}.$$

1. • *Initialisation* : $u_0 = 1$, donc $1 \leq u_0 \leq e^2$.

L'encadrement est vrai au rang 0.

- *Hérédité* : supposons que pour $n \in \mathbb{N}$, on ait :

$1 \leq u_n \leq e^2$, on a donc par croissance de la fonction $\sqrt{\cdot}$, $\sqrt{1} \leq \sqrt{u_n} \leq e$ ou encore $1 \leq \sqrt{u_n} \leq e$, puis par produit par e :

$e \leq e \times \sqrt{u_n} \leq e \times e$ et *a fortiori* $1 \leq u_{n+1} \leq e^2$. L'encadrement est héréditaire.

On a montré que l'encadrement est vrai au rang 0 et que s'il est vrai au rang n quelconque il est vrai au rang $n+1$; d'après le principe de la récurrence on a montré que pour tout naturel n , $1 \leq u_n \leq e^2$.

2. a. Quel que soit le naturel n , $u_{n+1} - u_n = e\sqrt{u_n} - u_n = \sqrt{u_n}(e - \sqrt{u_n})$.

Or on a d'une part $\sqrt{u_n} \geq 0$, et on a vu dans la question précédente que $\sqrt{u_n} < e \iff e - \sqrt{u_n} > 0$ donc finalement $\sqrt{u_n}(e - \sqrt{u_n}) \geq 0$ ou encore $u_{n+1} - u_n \geq 0 \iff u_{n+1} \geq u_n$: la suite (u_n) est croissante.

- b. La suite (u_n) est croissante et majorée par e^2 elle est donc convergente vers une limite $\ell \leq e^2$.

3. Pour tout entier naturel n , on pose

$$v_n = \ln(u_n) - 2.$$

- a. Pour tout entier naturel n , $v_{n+1} = \ln(u_{n+1}) - 2 = \ln(e \times \sqrt{u_n}) - 2 = \ln e + \ln \sqrt{u_n} - 2 = 1 - 2 + \frac{1}{2} \ln u_n = \frac{1}{2} \ln u_n - 1 = \frac{1}{2} (\ln u_n - 2) = \frac{1}{2} v_n$.

L'égalité $v_{n+1} = \frac{1}{2} v_n$ montre que la suite (v_n) est géométrique de raison $\frac{1}{2}$ de premier terme $v_0 = \ln u_0 - 2 = 0 - 2 = -2$.

b. On sait que pour tout naturel n , $v_n = v_0 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n = -2\left(\frac{1}{2}\right)^n$.

c. Or $v_n = \ln(u_n) - 2 \iff \ln(u_n) = v_n + 2 = 2 - 2\left(\frac{1}{2}\right)^n \iff u_n = e^{2 - 2\left(\frac{1}{2}\right)^n}$.

d. Comme $-1 < \frac{1}{2} < 1$, on sait que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$, donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} 2 - 2\left(\frac{1}{2}\right)^n = 2$ et enfin $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = e^2$.

justifiant.

Affirmation 1 : « Si $u_0 = 2018$, alors la suite (u_n) est croissante. »

On a $u_1 = e \times \sqrt{2018} \approx 122$;

$u_2 = e \times \sqrt{u_1} \approx 30$;

$u_3 = e \times \sqrt{u_2} \approx 15$ L'affirmation n'est pas vraie.

Affirmation 2 : « Si $u_0 = 2$, alors pour tout entier naturel n , $1 \leq u_n \leq e^2$. »

L'affirmation est vraie car l'initialisation de la récurrence est encore valable : $1 \leq u_0 \leq e^2$, donc l'encadrement est encore vrai.

Affirmation 3 : « La suite (u_n) est constante si et seulement si $u_0 = 0$. »

La suite (u_n) est constante si et seulement si quel que soit n , $u_{n+1} = u_n \iff e \times \sqrt{u_n} = u_n \iff e \times \sqrt{u_n} = \sqrt{u_n} \times \sqrt{u_n} \iff e = \sqrt{u_n} \iff u_n = e^2$.

L'affirmation est fausse.

EXERCICE 4

5 points

CANDIDATS AYANT SUIVI L'ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

Soit la suite (u_n) définie par $u_0 = 0$ et, pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = 3u_n + 1$.

- 1.** Pour tout entier naturel n non nul, $u_{n+1} = 3u_n + 1 \iff 1u_{n+1} - 3u_n = 1$: cette égalité montre que les entiers u_n et u_{n+1} sont premiers entre eux.
- 2.**
 - si u_n est pair, $3u_n$ l'est aussi et $3u_n + 1$ est impair donc u_{n+1} est impair ;
 - si u_n est impair, $3u_n$ l'est aussi et $3u_n + 1$ est pair donc u_{n+1} est pair.

Donc u_0 est pair, u_1 est impair, u_2 est pair, ...
- 3.** $u_0 = 0$, $u_1 = 1$, $u_2 = 4$, $u_3 = 13$, $u_4 = 40$, $u_5 = 121$: 5 est premier et $u_5 = 11^2$ n'est pas premier : l'affirmation est fausse.
- 4. a.** *Initialisation* : $3^0 - 1 = 1 - 1 = 0 = 2u_0$: la relation est vraie au rang 0.

Hérédité : supposons que pour $n \in \mathbb{N}$, on ait $2u_n = 3^n - 1$, alors

$u_{n+1} = 3u_n + 1$, donc $2u_{n+1} = 2(3u_n + 1) = 2 \times 3u_n + 2 = 3 \times 2u_n + 2 = 3 \times (3^n - 1) + 2 = 3^{n+1} - 3 + 2 = 3^{n+1} - 1$: la relation est vraie au rang $n + 1$.

On a montré que la relation est vraie au rang 0 et que si elle est vraie au rang n elle l'est aussi au rang suivant $n + 1$: d'après le principe de récurrence on a donc montré que pour tout entier naturel n , $2u_n = 3^n - 1$.

b.

n	3^n	$3^n \equiv \dots [7]$
1	3	3
2	9	2
3	27	6
4	81	4
5	243	5
6	729	1

Le plus petit naturel non nul tel que $3^n \equiv 1[7]$ est donc 6.

c. $2022 = 6 \times 337$.

On a donc d'après la relation démontrée par récurrence :

$$2u_{2022} = 3^{2022} - 1 = 3^{6 \times 337} - 1 = (3^6)^{337}.$$

D'après la question précédente $3^6 \equiv 1[7]$, donc

$$2u_{2022} \equiv 1^{337} - 1[7] \text{ ou } 2u_{2022} \equiv 1 - 1[7], \text{ d'où}$$

$2u_{2022} \equiv 0[7]$, donc $2u_{2022}$ est un multiple de 7 et comme 2 est premier avec 7, u_{2022} est un multiple de 7.

5. a. $u_0 = 0 \equiv 0[5]$

$$u_1 = 1 \equiv 1[5]$$

$$u_2 = 4 \equiv 4[5]$$

$$u_3 = 13 \equiv 3[5]$$

$$u_4 = 40 \equiv 0[5]$$

b.

Reste de la division euclidienne de m par 5	0	1	2	3	4
Reste de la division euclidienne de $3m + 1$ par 5	1	4	2	0	3

c. Si pour tout entier naturel n , u_n est congru à 4 modulo 5, $3u_n$ est aussi congru à 2 modulo 5 et $3u_n + 1 = u_{n+1}$ est congru à 3 modulo 5.

De même d'après le tableau de la question précédente :

u_{n+2} est congru à 0 modulo 5;

u_{n+3} est congru à 1 modulo 5;

u_{n+4} est congru à 4 modulo 5 et ainsi de suite.

d. D'après la question précédente les restes des divisions euclidiennes de u_n par 5 sont de façon cyclique : 4, 3, 0, 1 : on ne peut donc avoir comme reste 2.

ANNEXE À RENDRE AVEC LA COPIE

Exercice 2

