

Corrigé du baccalauréat S Métropole–La Réunion

13 septembre 2018

Exercice 1**4 points****Commun à tous les candidats**

1. On a le système $\begin{cases} g(0) = \frac{1}{8} \\ g(10) = \frac{64}{100} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{1+ke^{-0}} = \frac{1}{8} \\ \frac{1}{1+ke^{-10a}} = \frac{64}{100} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{1+k} = \frac{1}{8} \\ \frac{1}{1+ke^{-10a}} = \frac{64}{100} \end{cases}$

La première équation donne $k = 7$ et en reportant cette valeur dans la deuxième équation :

$$\frac{1}{1+7e^{-10a}} = \frac{64}{100} \Leftrightarrow 100 = 64(1+7e^{-10a}) \Leftrightarrow 100 = 64 + 448e^{-10a} \Leftrightarrow 36 = 448e^{-10a} \Leftrightarrow 9 = 112e^{-10a} \Leftrightarrow \frac{9}{112} = e^{-10a} \Leftrightarrow -10a = \ln \frac{9}{112} \Leftrightarrow a = -\frac{1}{10} \ln \frac{9}{112} \Leftrightarrow a \approx 0,252127$$

2.

$$g(t) = \frac{1}{1+7e^{-\frac{t}{4}}}$$

a. La fonction g est dérivable sur \mathbb{R} et sur cet intervalle :

$$g'(t) = -7 \times \frac{-\frac{1}{4}e^{-\frac{t}{4}}}{(1+7e^{-\frac{t}{4}})^2} = \frac{7e^{-\frac{t}{4}}}{4(1+7e^{-\frac{t}{4}})^2} > 0 \text{ car quotient de termes supérieurs à zéro.}$$

La fonction g est donc strictement croissante sur $[0; +\infty[$.

b. Résolvons l'inéquation : $\frac{1}{1+7e^{-\frac{t}{4}}} \geq 0,99 \Leftrightarrow 1 \geq 0,99(1+7e^{-\frac{t}{4}}) \Leftrightarrow$

$$1 \geq 0,99 + 6,93e^{-\frac{t}{4}} \Leftrightarrow 0,01 \geq 6,93e^{-\frac{t}{4}} \Leftrightarrow \frac{0,01}{6,93} \geq e^{-\frac{t}{4}} \Leftrightarrow \frac{1}{693} \geq e^{-\frac{t}{4}} \Leftrightarrow$$

$$\ln \frac{1}{693} \geq -\frac{t}{4} \text{ (par croissance de la fonction logarithme népérien)} \Leftrightarrow \frac{t}{4} \geq -\ln \frac{1}{693} \Leftrightarrow$$

$$t \geq 4 \times \left(-\ln \frac{1}{693}\right). \text{ Or } 4 \times \left(-\ln \frac{1}{693}\right) \approx 26,2.$$

Donc dans 27 ans d'après ce modèle au moins 99 % des ménages seront équipés.

3. a. On a $g(18) = \frac{1}{1+7e^{-\frac{18}{4}}} = \frac{1}{1+7e^{-\frac{9}{2}}} \approx 0,928$ soit 0,93 au centième près.

b. Intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95 % :

$n = 1000 > 30$; $np = 930 \geq 5$ et $n(1-p) = 70 \geq 5$: on peut donc considérer l'intervalle

$$\left[p - 1,96\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}; p + 1,96\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} \right] \approx [0,914; 0,946].$$

Or le sondage donne une fréquence de foyers équipés d'une connexion fixe égale à

$$\frac{880}{1000} = 0,880 \text{ et } 0,880 \notin [0,914; 0,946].$$

Ce sondage donne raison à ces statisticiens sceptiques.

Exercice 2**5 points****Commun à tous les candidats**

$$1. (z^2 - 2z + 4)(z^2 + 4) = 0 \iff \begin{cases} z^2 - 2z + 4 = 0 \\ \text{ou} \\ z^2 + 4 = 0 \end{cases}.$$

- $z^2 - 2z + 4 = 0 \iff (z - 1)^2 - 1 + 4 = 0 \iff (z - 1)^2 = -3 \iff (z - 1)^2 = (i\sqrt{3})^2.$

Cette équation a deux solutions $1 + i\sqrt{3}$ et $1 - i\sqrt{3}$.

- $z^2 + 4 = 0 \iff z^2 = (2i)^2$: cette équation a deux solutions : $2i$ et $-2i$.

Conclusion : l'équation a quatre solutions :

$$1 + i\sqrt{3}; \quad 1 - i\sqrt{3}; \quad 2i; \quad -2i.$$

2. a. • $|z_A|^2 = 1 + 3 = 4 = 2^2 \Rightarrow |z_A| = 2.$

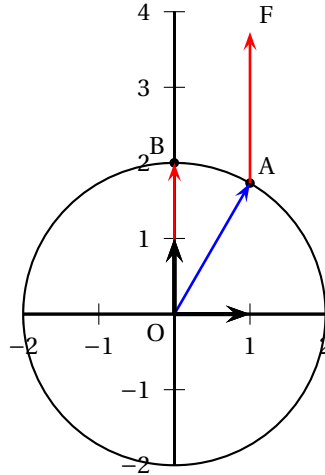
On peut écrire $z_A = 2 \left(\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = 2 \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right)$ soit en écriture exponentielle

$$z_A = 2e^{i\frac{\pi}{3}}.$$

- $z_B = 2e^{i\frac{\pi}{2}}.$

On a donc avec les modules $OA = OB = 2$: A et B appartiennent au cercle de centre O et de rayon 2.

b.



c. On a $\frac{z_B}{z_A} = \frac{2e^{i\frac{\pi}{2}}}{2e^{i\frac{\pi}{3}}} = \frac{e^{i\frac{\pi}{2}}}{e^{i\frac{\pi}{3}}} = e^{i(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3})} = e^{i\frac{\pi}{6}}.$

Or $(\vec{OA}, \vec{OB}) = \arg \frac{z_B}{z_A} = \frac{\pi}{6}.$

3. a. F se construit par la méthode du parallélogramme; or on a vu que $OA = OB$: le parallélogramme ayant deux côtés consécutifs de même longueur est un losange de côtés de mesure 2.

b. OAFB est un parallélogramme et $OA = OB = 1$, donc deux de ses côtés consécutifs ont même longueur : OAFB est donc un losange et par conséquent la droite (OF) est la bissectrice de l'angle (\vec{OA}, \vec{OB}) ; donc une mesure de l'angle (\vec{OA}, \vec{OF}) est $\frac{\pi}{12}.$

$$(\vec{u}, \vec{OF}) = (\vec{u}, \vec{OA}) + (\vec{OA}, \vec{OF}) = \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{12} = \frac{5\pi}{12} \text{ qui est un argument de } z_F.$$

c. On a $z_F = z_A + z_B = 1 + i\sqrt{3} + 2i = 1 + i(\sqrt{3} + 2).$

Donc $|z_F|^2 = 1^2 + (\sqrt{3} + 2)^2 = 1 + 3 + 4 + 4\sqrt{3} = 8 + 4\sqrt{3} = 4(2 + \sqrt{3}).$

$$\text{Donc } |z_F| = 2\sqrt{2 + \sqrt{3}}.$$

On a vu qu'un argument de z_F est $\frac{5\pi}{12}$, donc l'écriture trigonométrique de z_F est :

$$z_F = 2\sqrt{2 + \sqrt{3}} \left(\cos \frac{5\pi}{12} + i \sin \frac{5\pi}{12} \right).$$

- d. On a vu que la partie réelle de z_F est égale à 1 et d'après la question précédente elle est aussi égale à $2\sqrt{2 + \sqrt{3}} \cos \frac{5\pi}{12}$.

Donc en égalant :

$$1 = 2\sqrt{2 + \sqrt{3}} \cos \frac{5\pi}{12} \iff \cos \frac{5\pi}{12} = \frac{1}{2\sqrt{2 + \sqrt{3}}} = \frac{\sqrt{2 - \sqrt{3}}}{2 \times (4 - 3)} = \frac{\sqrt{2 - \sqrt{3}}}{2}.$$

4. Ces deux nombres sont positifs ($\sqrt{6} > \sqrt{2}$); comparons leurs carrés :

$$\begin{aligned} \bullet & \left[\frac{\sqrt{2 - \sqrt{3}}}{2} \right]^2 = \frac{2 - \sqrt{3}}{4}; \\ \bullet & \left[\frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4} \right]^2 = \frac{6 + 2 - 2\sqrt{12}}{16} = \frac{8 - 4\sqrt{3}}{16} = \frac{4(2 - \sqrt{3})}{16} = \frac{2 - \sqrt{3}}{4}. \end{aligned}$$

Ces deux nombres positifs ont le même carré : ils sont égaux; les deux calculatrices donnent le résultat correct.

Exercice 3

6 points

Commun à tous les candidats

Question 1

Tout point M de (D) a des coordonnées qui vérifient $x + y + z - 3 = 2 + t + 1 - 3t + 2t - 3 = 0$, donc appartient à (P) : la droite (D) est incluse dans le plan (P) : réponse B.

Question 2

On sait que $E = \frac{1}{\lambda} = 20$ donc $\lambda = \frac{1}{20} = 0,05$.

La probabilité que son attente dépasse les 10 minutes est égale à

$$P_{T \geq 20}(T \geq 30) = P(T \geq 10) = e^{-0,05 \times 30} = e^{-1,5} = e^{-\frac{1}{2}} : \text{réponse A.}$$

Question 3

La variable $D' = \frac{D - 65}{\sigma}$ suit la loi normale centrée réduite.

$$\text{On a } P\left(\frac{63,5 - 65,1}{\sigma} \leq P(D') \leq P\left(\frac{66,7 - 65,1}{\sigma}\right)\right) = 0,99.$$

De $P\left(\frac{-1,6}{\sigma}\right) = 0,0005$, la calculatrice donne $\sigma \approx 0,62$: réponse C.

Question 4

$f(x) = 2 \times \frac{2x}{x^2 + 1}$; on reconnaît une primitive F de f : $F(x) = 2 \ln(x^2 + 1)$.

L'aire de la surface hachurée est donc égale (en unité d'aire) à :

$$\int_0^2 f(x) dx = [F(x) - F(0)]_0^2 = 2 \ln(2^2 + 1) - 2 \ln(0^2 + 1) = 2 \ln 5.$$

La droite d'équation $x = a$ partage la surface en deux surfaces; les deux surfaces obtenues ont la même aire si :

$$\int_0^a f(x) dx = \int_a^2 f(x) dx \iff F(a) - F(0) = F(2) - F(a) \iff 2F(a) = F(0) + F(2) \iff 2\ln(a^2 + 1) = 2\ln 1 + 2\ln 5 \iff 2\ln(a^2 + 1) = \ln 5 \iff \ln[(a^2 + 1)]^2 = \ln 5 \iff (a^2 + 1)^2 = 5 \iff a^2 + 1 = \sqrt{5} \iff a^2 = \sqrt{5} - 1 \iff (\text{puisque } a > 0) \ a = \sqrt{\sqrt{5} - 1}. \text{ Réponse B.}$$

Exercice 4**5 points****Pour les candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité**

1. Avec $a = 2,9$ il semble que la suite (u_n) soit décroissante et convergente vers 1.
Avec $a = 3,1$ il semble que la suite (u_n) soit croissante et tende vers $+\infty$.
2. a. Les termes u_n et u_{n+1} ayant pour limite ℓ , on a donc $\ell = \frac{1}{2}\ell - \ell + \frac{3}{2}$.
b. $\ell = \frac{1}{2}\ell - \ell + \frac{3}{2} \iff 2\ell = \ell^2 - 2\ell + 3 \iff \ell^2 - 4\ell + 3 = 0$
1 est solution évidente de cette équation que l'on peut écrire $(\ell - 1)(\ell - 3) = 0$.
L'autre solution est donc $\ell = 3$.
Si elle converge cela ne peut être que vers 1 ou 3.
3. a. On prend $a = 2,9$. f est dérivable sur \mathbb{R} et sur cet intervalle :
 $f'(x) = x - 1$; donc $f'(x) \geq 0$ pour $x \geq 1$: la fonction f est croissante sur $[1; +\infty[$.
b. *Initialisation* : $u_0 = 2,9$ et $u_1 : \frac{1}{2} \times 2,9^2 - 2,9 + \frac{3}{2} = 2,805$.
On a bien $1 \leq u_1 \leq u_0$.
Hérédité : supposons que pour $n \in \mathbb{N}$, on ait : $1 \leq u_{n+1} \leq u_n$:
puisque la fonction f est croissante sur $[1; +\infty[$, les images par f des trois termes de cet encadrement sont rangées dans le même ordre :
 $f(1) \leq f(u_{n+1}) \leq f(u_n)$.
Soit avec $f(1) = \frac{1}{2} - 1 + \frac{3}{2} = 1$: $1 \leq u_{n+2} \leq u_{n+1}$: l'encadrement est vrai au rang $n + 1$.
On a montré que l'encadrement est vrai au rang 0 et que s'il est vrai au rang n , il l'est aussi au rang $n + 1$.
D'après le principe de récurrence on a donc démontré que :
pour tout entier naturel n , on a : $1 \leq u_{n+1} \leq u_n$.
c. D'après le résultat précédent la suite (u_n) décroît et est minorée par 1 : elle est donc, d'après le théorème de la convergence monotone, convergente vers un nombre $\ell \geq 1$.
De plus $a = 2,9$ est le premier terme de la suite qui est décroissante, donc $\ell < 2,9$.
Les deux seules valeurs possibles pour la limite sont 1 et 3 (question 2.b.) ; ça ne peut pas être 3 donc $\ell = 1$.
4. a. Si la suite est majorée, comme elle est croissante, elle est convergente (théorème de la convergence monotone).
On a vu que si la suite converge ce ne peut être que vers 1 ou 3, ce qui n'est pas possible puisque le premier terme est $u_0 = 3,1 > 3$ et que la suite est croissante : cette suite n'est donc pas majorée.
b. Par conséquent on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$.
c.

$P \leftarrow 0$
 $U \leftarrow 3,1$

 Tant que $U \leq 10^6$
 $P \leftarrow P + 1$
 $U \leftarrow \frac{1}{2}U^2 - U + \frac{3}{2}$
 Fin Tant que

Rem. L'algorithme s'arrête à u_9 .

Exercice 4

5 points

Pour les candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Partie A

On considère la suite (u_n) définie par : $u_0 = 1$, $u_1 = 6$ et, pour tout entier naturel n :

$$u_{n+2} = 6u_{n+1} - 8u_n.$$

1. • $u_2 = 6u_1 - 8u_0 = 36 - 8 = 28$;
 • $u_3 = 6u_2 - 8u_1 = 6 \times 28 - 8 \times 6 = 168 - 48 = 120$.
2. Pour tout $n \in \mathbf{N}$, $AU_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -8 & 6 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ -8u_n + 6u_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_{n+2} \end{pmatrix} = U_{n+1}$.
3. a. On montre par récurrence que, pour tout entier naturel n , on a : $A^n = 2^n B + 4^n C$.

Initialisation : Pour $n = 0$, $A^0 = I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $2^0 B + 4^0 C = B + C = \begin{pmatrix} 2-1 & -0,5+0,5 \\ 4-4 & -1+2 \end{pmatrix} =$

$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I$: la relation est vraie au rang 0.

Hérédité : Supposons que pour $n \in \mathbf{N}$, $A^n = 2^n B + 4^n C$. On a

$A^{n+1} = A^n \times A = (2^n B + 4^n C) \times A = 2^n BA + 4^n CA$. Or

$BA = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 8 & -2 \end{pmatrix}$ et $CA = \begin{pmatrix} -4 & 2 \\ -16 & 8 \end{pmatrix}$, d'où

$A^{n+1} = 2^n \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 8 & -2 \end{pmatrix} + 4^n \begin{pmatrix} -4 & 2 \\ -16 & 8 \end{pmatrix}$ soit en factorisant 2 dans la première matrice et 4 dans la seconde :

$A^{n+1} = 2^{n+1} \begin{pmatrix} 2 & -0,5 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} + 4^{n+1} \begin{pmatrix} -1 & 0,5 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}$ et enfin

$A^{n+1} = 2^{n+1} B + 4^{n+1} C$: la relation est vraie au rang $n + 1$.

On a montré que la relation est vraie au rang 0 et que si elle est vraie au rang n elle l'est aussi au rang $n + 1$; on a donc démontré par le principe de récurrence que pour tout entier naturel n , $A^n = 2^n B + 4^n C$.

- b. On a $U_0 = \begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \end{pmatrix}$, donc

$$U_n = A^n U_0 = (2^n B + 4^n C) \times \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \end{pmatrix};$$

$$\text{or } 2^n B + 4^n C = \begin{pmatrix} 2^{n+1} & -2^{n-1} \\ 2^{n+2} & -2^n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4^n & 2 \times 4^{n-1} \\ -4^{n+1} & 2 \times 4^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^{n+1} - 4^n & -2^{n-1} + 2 \times 4^{n-1} \\ 2^{n+2} - 4^{n+1} & -2^n + 2 \times 4^n \end{pmatrix}.$$

$$\text{Donc : } U_n = A^n U_0 = \begin{pmatrix} 2^{n+1} - 4^n & -2^{n-1} + 2 \times 4^{n-1} \\ 2^{n+2} - 4^{n+1} & -2^n + 2 \times 4^n \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

D'où en prenant le premier terme :

$$u_n = 2^{n+1} - 4^n + 6(-2^{n-1} + 2 \times 4^{n-1}) = 2^{n+1} - 4^n - 3 \times 2^n + 3 \times 4^n = 2 \times 2^n - 3 \times 2^n - 4^n + 3 \times 4^n \\ = 2 \times 4^n - 2^n.$$

Partie B

1. Calculons $2^n(2^{n+1} - 1) = 2^{2n+1} - 2^n = 2 \times 2^{2n} - 2^n = 2 \times 4^n - 2^n = u_n$ (d'après la question précédente).
2. a. L'algorithme permet pour une valeur naturelle de N de dire si le nombre u_N est parfait ou non.

N	P	U	S	Affichage final
0	1	1	1	non
1	3	6	12	oui
2	7	28	56	oui
3	15	120	360	non
4	31	496	992	oui
5	63	2016	6552	non
6	127	8128	16256	oui

- b. Il semble que u_p soit parfait lorsque P est un naturel premier; dans ce cas l'algorithme affiche « oui ».
3. a. On sait que $u_n = 2^n p_n$ et que p_n est un nombre premier.
Les diviseurs de u_n sont donc les diviseurs de 2^n , de p_n , ou leurs produits :
ce sont donc $2^0, 2^1, \dots, 2^n, 2^0 \times p_n, 2^1 \times p_n, \dots, 2^n \times p_n$.

Leur somme est

$$S_n = (2^0 + 2^1 + \dots + 2^n) + (2^0 \times p_n + 2^1 \times p_n + \dots + 2^n \times p_n) \\ = (2^0 + 2^1 + \dots + 2^n) + (2^0 + 2^1 + \dots + 2^n) p_n = (1 + p_n)(2^0 + 2^1 + \dots + 2^n) \\ = (1 + p_n) \times 2^0 \frac{1 - 2^{n+1}}{1 - 2} = (1 + p_n)(2^{n+1} - 1) = (1 + p_n) p_n$$

- b. On a $p_n = 2^{n+1} - 1 \iff p_n + 1 = 2^{n+1}$, donc :
 $S_n = (1 + p_n) p_n = 2^{n+1} \times p_n = 2 \times 2^n p_n = 2u_n$.
Donc u_n est parfait si p_n est un naturel premier.