Durée : 4 heures

Baccalauréat S Amérique du Sud 12 novembre 2018

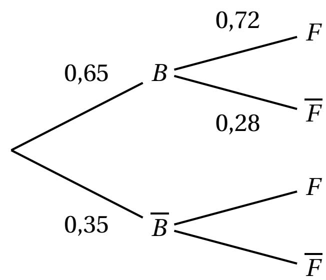
EXERCICE 1 **4 points**

Commun à tous les candidats

Les parties A, B *et* C *peuvent être traitées de façon indépendante.*
Dans tout l'exercice, les résultats seront arrondis, si nécessaire, au millième.

Partie A

1. On peut s'aider de l'arbre suivant :



D'après la loi des probabilité totales on sait que :
$p(F) = P(B \cap F) + P\left(\overline{B} \cap F\right)$, d'où
$P\left(\overline{B} \cap F\right) = p(F) - P(B \cap F)$.
Or $P(B \cap F) = P(B) \times P_B(F)$, donc
$P\left(\overline{B} \cap F\right) = p(F) - P(B) \times P_B(F) = 0{,}54 - 0{,}65 \times 0{,}72 = 0{,}54 - 0{,}468 = 0{,}072$.

2. On a $P_F\left(\overline{B}\right) = \dfrac{P\left(F \cap \overline{B}\right)}{P(F)} = \dfrac{0{,}072}{0{,}54} \approx 0{,}133\,3 \approx 0{,}133$ au millième près.

3. Il faut trouver $P_{\overline{B}}(F) = \dfrac{P\left(\overline{B} \cap F\right)}{P\left(\overline{B}\right)} = \dfrac{0{,}072}{0{,}35} \approx 0{,}205\,7 \approx 0{,}206$ au millième près.

Partie B

1. Il faut trouver $P(X > 95)$; la calculatrice donne $P(X \leqslant 95) \approx 0{,}993\,8$, d'où $P(X > 95) = 1 - P(X \leqslant 95) \approx 1 - 0{,}993\,8 \approx 0{,}006$ au millième près.
2. La calculatrice donne $P(X < 85{,}893) \approx 0{,}02$.
   Ce résultat signifie que le commerçant a une probabilité de 2 % de vendre moins de 85,893 kg de farine biologique.

Partie C

Dans cette étude de marché, il est précisé que 46,8 % des consommateurs en France privilégient des produits locaux ; on va tester cette hypothèse $p = 0{,}468$ sur un échantillon de taille $n = 2\,500$.
Sous ces conditions, on vérifie que :
$n = 2\,500 \geqslant 30$, $np = 2\,500 \times 0{,}468 = 1\,170 \geqslant 5$ et $n(1-p) = 2\,500 \times 0{,}532 = 1\,330 \geqslant 5$.

Les conditions d'établissement d'un intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95 % sont donc établies. Cet intervalle est

$$I = \left[p - 1{,}96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\ ;\ p + 1{,}96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\right]$$

$$= \left[0{,}468 - 1{,}96\frac{\sqrt{0{,}468 \times 0{,}532}}{50}\ ;\ 0{,}468 + 1{,}96\frac{\sqrt{0{,}468 \times 0{,}532}}{50}\right] \approx [0{,}448\ ;\ 0{,}488].$$

Sur l'échantillon de clients la fréquence d'achat est : $\dfrac{1\,025}{2\,500} = 0{,}41$.

Comme $0{,}41 \notin [0{,}448\ ;\ 0{,}488]$ on peut dire que sa clientèle n'est pas représentative des consommateurs en France.

EXERCICE 2 **4 points**

Commun à tous les candidats

$$f(x) = 10\mathrm{e}^{u(x)}$$

où u est la fonction définie sur $[0\ ;\ +\infty[$ par :

$$u(x) = -\mathrm{e}^{2-\frac{x}{10}}.$$

1. On a $f'(x) = 10\,\mathrm{e}^{u(x)} \times u'(x)$; or $u'(x) = -\left(-\dfrac{1}{10}\mathrm{e}^{2-\frac{x}{10}}\right) = -\dfrac{1}{10}\left(-\mathrm{e}^{2-\frac{x}{10}}\right) = -\dfrac{1}{10}u(x)$.

Donc $f'(x) = -u(x)\,\mathrm{e}^{u(x)}$.

On sait que, quel que soit le réel x, $\mathrm{e}^{2-\frac{x}{10}} > 0$, donc $u(x) < 0$ et comme $\mathrm{e}^{u(x)} > 0$ quel que soit u, on a finalement $f'(x) > 0$: la fonction f est donc strictement croissante sur $[0\ ;\ +\infty[$.

2. **a.** $f(20) = 10\mathrm{e}^{-\mathrm{e}^{2-\frac{20}{10}}} = 10\mathrm{e}^{-\mathrm{e}^{2-2}} = 10\mathrm{e}^{-1} = \dfrac{10}{\mathrm{e}}$.

Comme $\dfrac{10}{\mathrm{e}} \approx 3{,}678$ soit environ 3,7 cm : c'est la taille de la queue du lézard après vingt jours de repousse.

b. On a $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \mathrm{e}^{2-\frac{x}{10}} = 0$, d'où $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} 10\mathrm{e}^{-\mathrm{e}^{2-\frac{x}{10}}} = 10\mathrm{e}^{0} = 10$.

La fonction est strictement croissante de $f(20) \approx 3{,}7$ à 10 valeur maximale : la taille de la repousse ne sera jamais égale à 11 cm.

3.

$$f''(x) = \frac{1}{10}u(x)\mathrm{e}^{u(x)}(1 + u(x)).$$

a. Comme $\dfrac{1}{10} > 0$ et $\mathrm{e}^{u(x)} > 0$, le signe de $f''(x)$ est celui du produit $u(x)(1 + u(x))$.

On sait quel que soit x, $u(x) < 0$.

D'autre part $1 + u(x) > 0 \iff u(x) > -1 \iff -\mathrm{e}^{2-\frac{x}{10}} > -1 \iff \mathrm{e}^{2-\frac{x}{10}} < 1 \iff 2 - \frac{x}{10} < 0$ (par croissance de la fonction logarithme népérien) $\iff 2 < \frac{x}{10} \iff x > 20$.

Conclusion : $f''(x) > 0$ sur $[0\,;\,20]$ et $f''(x) < 0$ sur $[20\ ;\ +\infty[$.

f' est donc croissante sur $[0\,;\,20]$ et décroissante sur $[20\ ;\ +\infty[$.

b. D'après le résultat précédent la vitesse est maximale pour $x = 20$: la vitesse de croissance de la longueur de la queue du lézard est maximale au bout de 20 jours.

EXERCICE 3 **4 points**

Commun à tous les candidats

1. Les deux espèces se croisent si leurs coordonnées respectives sont égales soit si

$$\left\{\begin{array}{lcl}3+t &=& 10k\\ 6t &=& 2+6k\\ -3t &=& -4k\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{lcl}3+t &=& 10k\\ 3t &=& 1+3k\\ 3t &=& 4k\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{lcl}3+t &=& 10k\\ 3t &=& 1+3k\\ \frac{3}{4}t &=& k\end{array}\right. \iff$$

$$\left\{\begin{array}{lcl}3+t &=& 10\times\frac{3}{4}\\ 3t &=& 1+3\times\frac{3}{4}t\\ \frac{3}{4}t &=& k\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{lcl}3+t &=& \times\frac{15}{2}\\ 3t &=& 1+\frac{9}{4}t\\ \frac{3}{4}t &=& k\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{lcl}t &=& \frac{9}{2}\\ \frac{3}{4}t &=& 1\\ \frac{3}{4}t &=& k\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{lcl}t &=& \frac{9}{2}\\ t &=& \frac{4}{3}\\ \frac{3}{4}t &=& k\end{array}\right.$$

Ce système n'a pas de solution : il n'existe pas de réels t et k tels que les coordonnées sont égales; ou encore les deux droites n'ont pas de point commun.

2. L'objectif de cette question est d'estimer la distance minimale séparant ces deux trajectoires.

a. $\mathscr{D}_1$ a pour vecteur directeur $\overrightarrow{u_1}\begin{pmatrix}1\\6\\-3\end{pmatrix}$ et $\mathscr{D}_2$ a pour vecteur directeur $\overrightarrow{u_2}\begin{pmatrix}10\\6\\-4\end{pmatrix}$.

Or $\overrightarrow{n}\cdot\overrightarrow{u_1} = 3\times 1+13\times 6+27\times(-3) = 3+78-81 = 0$:
$\overrightarrow{n}\cdot\overrightarrow{u_2} = 3\times 10+13\times 6+27\times(-4) = 30+78-108 = 0$.

Donc le vecteur $\overrightarrow{n}\begin{pmatrix}3\\13\\27\end{pmatrix}$ est normal aux droites $\mathscr{D}_1$ et $\mathscr{D}_2$.

b. On a donc $\mathrm{H}(3+t~;~67~;~-3t)$ et $\mathrm{H}'(10k~;~2+6k~;~-4k)$.

On en déduit les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{\mathrm{HH}'}\left(10k-3-t~;~2+6k-6t~;~-4k+3t\right)$.

Ce vecteur $\overrightarrow{\mathrm{HH}'}$ est colinéaire au vecteur $\overrightarrow{n}$ si ses coordonnées son proportionnelles à celles du vecteur $\overrightarrow{n}$, donc s'il existe un nombre réel l tel que :

$10k-3-t = 3l, 2+6k-6t = 13l, -4l+3t = 27l$.

Or d'après le résultat donné par le logiciel de calcul formel, il y a une solution donnée par $k = \dfrac{675}{1814}, \ell = \dfrac{17}{907}, t = \dfrac{603}{907}$.

En remplaçant k et t par les valeurs trouvées on obtient :

$$\overrightarrow{\mathrm{HH}'}\begin{pmatrix}\dfrac{6750}{1814}-3-\dfrac{603}{907}\\ 2+\dfrac{4050}{1814}-\dfrac{7236}{1814}\\ -\dfrac{2700}{1814}+\dfrac{3618}{1814}\end{pmatrix}, \text{ ou } \overrightarrow{\mathrm{HH}'}\begin{pmatrix}\dfrac{102}{1814}\\ \dfrac{442}{1814}\\ \dfrac{918}{1814}\end{pmatrix}.$$

On en déduit que :

$\mathrm{HH}'^2 = \dfrac{102^2+442^2+918^2}{1814^2} = \dfrac{1048492}{3290596}$ et finalement

$\mathrm{HH}' = \sqrt{\dfrac{1048492}{3290596}} \approx 0,564$ soit avec une unité de 100 m, $\mathrm{HH}' \approx 56,4$ m.

3. **a.** On a donc $\overrightarrow{\mathrm{B}M}\begin{pmatrix}3+t-2\\6t-4\\-3t-0\end{pmatrix}$ ou $\overrightarrow{\mathrm{B}M}\begin{pmatrix}1+t\\6t-4\\-3t\end{pmatrix}$.

On a donc $\mathrm{B}M^2 = (1+t)^2+(6t-4)^2+(-3t)^2 = 1+t^2+2t+36t^2+16-48t+9t^2 = 46t^2-46t+17$.

On sait que la valeur minimale de ce trinôme est obtenue pour $t = -\dfrac{-46}{2\times 46} = \dfrac{1}{2}$, donc

$\mathrm{B}M_m^2 = 46\times\dfrac{1}{4}-46\times\dfrac{1}{2}+17 = \dfrac{11}{2}$, d'où une distance minimale :

$\mathrm{B}M_m = \sqrt{\dfrac{11}{2}}$.

b. Les tortues vertes passeront au minimum à $\sqrt{\dfrac{11}{2}} \approx 2{,}35$ unités soit 235 m de la balise.

EXERCICE 4 **3 points**

Commun à tous les candidats

• La première égalité $z_A + z_C = z_B + z_D$ peut s'écrire $\dfrac{z_A + z_C}{2} = \dfrac{z_B + z_D}{2}$: cette égalité montre que [AC] et [BD] ont le même milieu, donc que la quadrilatère ABCD est un parallélogramme.

• La deuxième égalité $z_A + \text{i}z_B = z_C + \text{i}z_D$ peut s'écrire $z_A - z_C = \text{i}z_D - \text{i}z_B$ ou encore $z_A - z_C = \text{i}\left[z_D - z_B\right]$. En prenant les modules des deux membres on obtient CA = BD ; en prenant les arguments on obtient $\left(\overrightarrow{\text{BD}}, \overrightarrow{\text{CA}}\right) = \dfrac{\pi}{2}$.

Le quadrilatère ABCD est un parallélogramme dont les diagonales ont la même longueur, c'est donc un rectangle et comme ses diagonales sont perpendiculaires c'est aussi un losange et finalement un carré.

EXERCICE 5 **5 points**

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

$$u_0 = 1,\ u_1 = k \text{ et } u_{n+2} = \frac{u_{n+1}^2}{ku_n} \text{ pour tout entier naturel } n$$

1. On a $u_2 = \dfrac{u_1^2}{ku_0} = \dfrac{k^2}{k \times 1} = k$;
   $u_3 = \dfrac{u_2^2}{ku_1} = \dfrac{k^2}{k \times k} = 1$;
   $u_4 = \dfrac{u_3^2}{ku_2} = \dfrac{1^2}{k \times k} = \dfrac{1}{k^2}$.
2. **a.** On tape dans la cellule B4 : =B3^2/(E2*B2).
   b. Pour $k = \text{e}$, il semble que $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} u_n = 0$.
   Pour $k = 0{,}9$, il semble que $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} u_n = +\infty$.

Dans la suite, on suppose que $k = \text{e}$.

On a donc $u_0 = 1$, $u_1 = \text{e}$ et, pour tout entier naturel n : $u_{n+2} = \dfrac{u_{n+1}^2}{\text{e}u_n}$.

3. On définit, pour tout entier naturel n, la suite (v_n) par : $v_n = \ln(u_{n+1}) - \ln(u_n)$.
   a. Comme $u_n > 0$, quel que soit $n \in \mathbb{N}$, $v_n = \ln(u_{n+1}) - \ln(u_n) = \ln \dfrac{u_{n+1}}{u_n}$.
   D'autre part $u_{n+2} = \dfrac{u_{n+1}^2}{\text{e}u_n} \iff \dfrac{u_{n+2}}{u_{n+1}} = \dfrac{u_{n+1}}{\text{e}u_n} \iff \text{e}\dfrac{u_{n+2}}{u_{n+1}} = \dfrac{u_{n+1}}{u_n}$.
   On déduit :
   $\ln\left(\text{e}\dfrac{u_{n+2}}{u_{n+1}}\right) = \ln\left(\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right) \iff \ln \text{e} + \ln \dfrac{u_{n+2}}{u_{n+1}} = \ln \dfrac{u_{n+1}}{\text{e}u_n}$ soit $1 + v_{n+1} = v_n \iff v_{n+1} = v_n - 1$.
   Cette égalité montre que la suite (v_n) est arithmétique de raison -1 de premier terme $v_0 = \ln u_1 - \ln u_0 = \ln \text{e} - \ln 1 = 1 - 0 = 1$.
   b. On sait que quel que soit $n \in \mathbb{N}$, $v_n = v_0 + n \times (-1)$, soit $v_n = 1 - n$.
4. On définit, pour tout entier naturel n non nul la suite (S_n) par $S_n = v_0 + v_1 + \cdots + v_{n-1}$.
   a. On a donc $S_n = 1 + (1-1) + (1-2) + \ldots + (1-(n-1)) = n \times 1 - (1 + 2 + 3 + \ldots + (n-1))$
   $$= n - \frac{n(n-1)}{2} = \frac{2n - n(n-1)}{2} = \frac{n(2-(n-1))}{2} = \frac{n(3-n)}{2}.$$

b. On a vu que quel que soit $n \in \mathbb{N}$, $v_n = \ln \dfrac{u_{n+1}}{u_n}$, donc

$S_n = v_0 + \ldots + v_n = \ln \dfrac{u_1}{u_0} + \ln \dfrac{u_2}{u_1} + \ldots + \ln \dfrac{u_n}{u_{n-1}} + \ln \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \ln \dfrac{u_1}{u_0} \times \dfrac{u_2}{u_1} \times \ldots \times \dfrac{u_{n-1}}{u_{n-2}} \times \dfrac{u_n}{u_{n-1}}$.

Tous les termes de u_1 à u_{n-1} se simplifient ; il ne reste plus que : $S_n = \ln \dfrac{u_n}{u_0} = \ln \dfrac{u_n}{1} = \ln u_n$.

5. a. D'après les deux questions précédentes on déduit que :

$$\left.\begin{array}{rcl} S_n &=& \dfrac{n(3-n)}{2} \\ S_n &=& \ln u_n \end{array}\right\} \text{donc } \ln u_n = \dfrac{n(3-n)}{2} \text{ et donc } u_n = \mathrm{e}^{\frac{n(3-n)}{2}}, \text{ quel que soit } n \in \mathbb{N}.$$

b. $u_n < 10^{-50} \iff \mathrm{e}^{\frac{n(3-n)}{2}} < 10^{-50} \iff \dfrac{n(3-n)}{2} < \ln 10^{-50} \iff -n^2 + 3n - 2\ln 10^{-50} < 0$

L'équation $-n^2 + 3n - 2\ln 10^{-50} = 0$ admet pour racines $n_1 \approx -13{,}75$ et $n_2 \approx 16{,}75$ donc $-n^2 + 3n - 2\ln 10^{-50} < 0$ pour $n \geqslant 17$.

La plus petite valeur de n telle que $u_n < 10^{-50}$ est $n = 17$.

On vérifie à la calculatrice que $u_{16} \approx 6{,}8 \times 10^{-46} > 10^{-50}$ et que $u_{17} = 2{,}1 \times 10^{-52} < 10^{-50}$.

EXERCICE 5 — 5 points

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Pour tout entier naturel n , on note F_n le n-ième nombre de Fermat. Il est défini par $F_n = 2^{2^n} + 1$.

Partie A :

Pierre de Fermat, leur inventeur, a conjecturé que : « Tous les nombres de Fermat sont premiers »,

1. a. $F_0 = 2^{2^0} + 1 = 2^1 + 1 = 3$ est premier.

$F_1 = 2^{2^1} + 1 = 2^2 + 1 = 5$ est premier.

$F_2 = 2^{2^2} + 1 = 2^4 + 1 = 17$ est premier.

$F_3 = 2^{2^3} + 1 = 2^8 + 1 = 257$ est premier.

b. On peut en déduire que les 4 premiers nombres de Fermat sont premiers mais on ne sait rien des suivants.

2. On considère l'algorithme ci-dessous :

```
F ← 2^(2^5) + 1
N ← 2
Tant que F%N ≠ 0
    N ← N+1
Fin Tant que
Afficher N
```

$F\%N$ désigne le reste de la division euclidienne de F par N.

La valeur affichée à la fin de l'exécution est 641.

On sort de l'algorithme dès que le nombre N est diviseur du nombre $F = F_5$. Donc on peut affirmer que 641 est un diviseur de F_5.

$F_5 > F_4$ et $F_4 = 2^{2^4} + 1 = 2^{16} + 1 = 65\,537 > 641$; donc on peut dire que $F_5 > 641$ donc que 641 est un diviseur strict de F_5. On en déduit que F_5 n'est pas premier.

Partie B :

L'objectif est de prouver que deux nombres de Fermat distincts sont toujours premiers entre eux.

1. Pour tout entier naturel n non nul on a

$(F_{n-1} - 1)^2 + 1 = \left(2^{2^{n-1}} + 1 - 1\right)^2 + 1 = \left(2^{2^{n-1}}\right)^2 + 1 = 2^{2 \times 2^{n-1}} + 1 = 2^{2^n} + 1 = F_n$.

2. Pour tout entier naturel n on note : $\displaystyle\prod_{i=0}^{n} F_i = F_0 \times F_1 \times F_2 \times \ldots \times F_{n-1} \times F_n$.

On a donc $\displaystyle\prod_{i=0}^{n} F_i = \left(\prod_{i=0}^{n-1} F_i\right) \times F_n$.

Soit $\mathscr{P}_n$ la propriété $\displaystyle\prod_{i=0}^{n-1} F_i = F_n - 2$.

On va démontrer par récurrence que cette propriété est vraie pour tout entier n non nul.

- Pour $n = 1$, on a : $\displaystyle\prod_{i=0}^{n-1} F_i = \prod_{i=0}^{0} F_i = F_0 = 3$ et $F_n - 2 = F_1 - 2 = 5 - 2 = 3$.
  Donc la propriété $\mathscr{P}_n$ est vraie au rang $n = 1$.
- Soit k un entier naturel quelconque non nul tel que $\mathscr{P}_k$ soit vraie. On a donc $\displaystyle\prod_{i=0}^{k-1} F_i = F_k - 2$.
  Or $\displaystyle\prod_{i=0}^{k} F_i = \prod_{i=0}^{k-1} F_i \times F_k$.
  D'après l'hypothèse de récurrence, $\displaystyle\prod_{i=0}^{k-1} F_i = F_k - 2$ donc $\displaystyle\prod_{i=0}^{k} F_i = (F_k - 2) \times F_k$.
  D'après la question **B.1.** en prenant $k + 1$ à la place de n, on a :
  $F_{k+1} = (F_k - 1)^2 + 1 = (F_k)^2 - 2F_k + 1 + 1 = (F_k - 2) \times F_k + 2$. Donc $F_{k+1} - 2 = (F_k - 2) \times F_k$.
  On en déduit que $\displaystyle\prod_{i=0}^{k} F_i = F_{k+1} - 2$ et donc que la propriété est vraie au rang $k + 1$; elle est donc héréditaire.
- La propriété est vraie au rang 1 et elle est héréditaire pour tout $n \geqslant 1$ donc, d'après le principe de récurrence, elle est vraie pour tout $n \geqslant 1$.

On a donc démontré que, pour tout entier naturel n non nul, on a $\displaystyle\prod_{i=0}^{n-1} F_i = F_n - 2$..

3. Soient m et n deux entiers naturels tels que $n > m$.

$$\prod_{i=0}^{n-1} F_i = F_n - 2 \iff \prod_{\substack{i=0\\ i\neq m}}^{n-1} F_i \times F_m = F_n - 2$$

On pose $q = \displaystyle\prod_{\substack{i=0\\ i\neq m}}^{n-1} F_i$; le nombre q est le produit d'entiers naturels donc c'est un entier naturel.

On a donc $qF_m = F_n - 2$ ce qui équivaut à $F_n - qF_m = 2$.

Donc, pour tous m et n tels que $n > m$, il existe un entier naturel q tel que $F_n - qF_m = 2$.

4. De l'égalité $F_n - qF_m = 2$ on déduit, d'après le théorème de Bézout, que le nombre 2 est un multiple du PGCD de F_n et de F_m.

Mais un nombre de Fermat est une puissance de 2 augmentée de 1, donc est un nombre impair.
On en déduit que le PGCD de F_m et F_n est 1 donc que deux nombres de Fermat (distincts) sont toujours premiers entre eux.