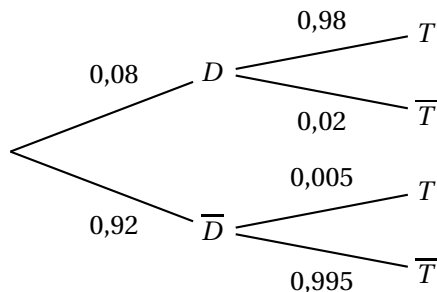


**Baccalauréat Amérique du Nord mai 2021**  
**ÉPREUVE D'ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ**

Le candidat traite 4 exercices : les exercices 1, 2 et 3 communs à tous les candidats et un seul des deux exercices A ou B.

**EXERCICE 1****5 points****Commun à tous les candidats****Partie A**

1.



2. D'après la loi des probabilités totales :

$$P(T) = P(D \cap T) + P(\bar{D} \cap T) : \text{or}$$

$$P(D \cap T) = P(D) \times P_D(T) = 0,08 \times 0,98 = 0,0784 \text{ et}$$

$$P(\bar{D} \cap T) = P(\bar{D}) \times P_{\bar{D}}(T) = 0,92 \times 0,005 = 0,00460. \text{ Donc :}$$

$$P(T) = 0,0784 + 0,0046 = 0,083.$$

3. a. La probabilité conditionnelle  $P_T(D) = \frac{P(T \cap D)}{P(T)} = \frac{P(D \cap T)}{P(T)} = \frac{0,0784}{0,083} \approx 0,9445$ , soit 0,945 au millième près.

b. D'après la question précédente  $0,945 < 0,95$ , donc le test ne sera pas commercialisé.

**Partie B**

1. a. Quel que soit l'athlète choisi la probabilité que cet athlète présente un test positif est 0,103. La variable aléatoire  $X$  suit donc une loi binomiale de paramètres  $n = 5$  et  $p = 0,103$ .
- b. On sait que  $E = n \times p = 5 \times 0,103 = 0,515$  : ceci montre que sur un grand nombre de contrôles, il y aura à peu près 1 athlète sur 10 contrôlé positif.

c. La probabilité qu'aucun athlète ne soit contrôlé positif est :

$$0,103^0 \times (1 - 0,103)^5 = 0,897^5 \approx 0,5807 \text{ soit environ } 0,581 \text{ au millième près.}$$

Donc la probabilité qu'au moins un des 5 athlètes contrôlés présente un test positif est :

$$1 - 0,581, \text{ soit } 0,419 \text{ au millième près.}$$

2. On a pour  $n$  athlètes contrôlés,  $P(X = 0) = 0,103^0 \times 0,897^n = 0,897^n$ .

Il faut donc trouver  $n$  tel que :

$$1 - 0,897^n \geq 0,75 \iff 1 - 0,75 \geq 0,897^n \iff 0,25 \geq 0,897^n.$$

La calculatrice donne le plus petit  $n \in \mathbb{N}$  vérifiant cette inéquation : pour  $n = 13$ , on a  $0,897^{13} \approx 0,243$ .

Il faut donc contrôler 13 athlètes en moyenne pour en trouver un positif.

## EXERCICE 2

5 points

$$\begin{cases} u_0 &= 0,6 \\ u_{n+1} &= 0,75u_n(1 - 0,15u_n) \end{cases}$$

où pour tout entier naturel  $n$ ,  $u_n$  désigne le nombre d'individus, en milliers, au début de l'année  $2020 + n$ .

1. • 2021 correspond à  $n = 1$ , donc  $u_1 = 0,75u_0 \times (1 - 0,15u_0) = 0,75 \times 0,6 \times (1 - 0,15 \times 0,6) = 0,45 \times (1 - 0,09) = 0,45 \times 0,91 = 0,4095$  soit environ 410 individus.
- 2022 correspond à  $n = 2$ , donc  $u_2 = 0,75u_1 \times (1 - 0,15u_1) = 0,75 \times 0,4095 \times (1 - 0,15 \times 0,4095) = 0,307125 \times (1 - 0,061425) = 0,307125 \times 0,938575 \approx 0,2822$  soit environ 228 individus.

Soit  $f$  la fonction définie sur l'intervalle  $[0; 1]$  par

$$f(x) = 0,75x(1 - 0,15x).$$

2.  $f$  est une fonction polynôme dérivable sur  $\mathbb{R}$ , donc sur  $[0; 1]$  et sur cet intervalle :

$$f'(x) = 0,75(1 - 0,15x) - 0,75x \times 0,15 = 0,75 - 0,1125x - 0,1125x = 0,75 - 0,225x.$$

$$\text{Or } 0 \leq x \leq 1 \Rightarrow 0 \leq 0,225x \leq 0,225 \Rightarrow -0,225 \leq -0,225x \leq 0 \Rightarrow$$

$$0,75 - 0,225 \leq 0,75 - 0,225x \leq 0,75 \text{ ou enfin } 0,525 \leq f'(x) \leq 0,75.$$

Sur  $[0; 1]$ ,  $f'(x) > 0$ , donc  $f$  est strictement croissante de  $f(0) = 0$  à  $f(1) = 0,75 \times 0,85 = 0,6375$ .

3. Sur  $[0; 1]$ ,  $f(x) = x \iff 0,75x(1 - 0,15x) = x \iff 0,75x(1 - 0,15x) - x = 0 \iff$   
 $x[0,75(1 - 0,15x) - 1] = 0 \iff x(0,75 - 0,1125x - 1) = 0 \iff x(-0,25 - 0,1125x) = 0 \iff$   

$$\begin{cases} x = 0 \text{ ou} \\ -0,25 - 0,1125x = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 0 \text{ ou} \\ -0,25 = 0,1125x \end{cases} \iff \begin{cases} x = 0 \text{ ou} \\ -\frac{0,25}{0,1125} = x \end{cases}$$
  
 Or  $-\frac{0,25}{0,1125} < 0$  donc dans  $[0; 1]$ ,  $S = \{0\}$ .

On remarquera pour la suite de l'exercice que, pour tout entier naturel  $n$ ,  $u_{n+1} = f(u_n)$ .

4. a. *Initialisation* : on a vu que  $0 \leq 0,4095 \leq 0,6 \leq 1$ , soit  $0 \leq u_1 \leq u_0 \leq 1$  : la relation est vraie au rang 0;

*Hérédité* : Supposons que pour  $n \in \mathbb{N}$ , on ait :

$0 \leq u_{n+1} \leq u_n \leq 1$ ; la fonction  $f$  étant strictement croissante sur  $[0; 1]$ , on a donc :  $f(0) \leq f(u_{n+1}) \leq f(u_n) \leq f(1)$ ,

soit puisque  $f(0) = 0$  et  $f(1) = 0,75 \times (1 - 0,15) = 0,6375 \leq 1$  :

$0 \leq u_{n+2} \leq u_{n+1} \leq 1$  : la relation est donc vraie au rang  $n + 1$ .

**Conclusion** : la relation est vraie au rang 0 et si elle est vraie au rang  $n$  naturel quelconque, elle est vraie au rang  $n + 1$  : d'après le principe de récurrence :

Pour tout entier naturel  $n$ ,  $0 \leq u_{n+1} \leq u_n \leq 1$ .

- b. La suite  $(u_n)$  est d'après la question précédente décroissante et minorée par 0; elle est donc convergente.

- c. Le résultat précédent montre que la suite  $(u_n)$  converge vers un nombre  $\ell \geq 0$  et ce nombre  $\ell$  vérifie l'équation  $f(x) = x$ , dont on a vu à la question 3. qu'elle n'avait que 0 comme solution.

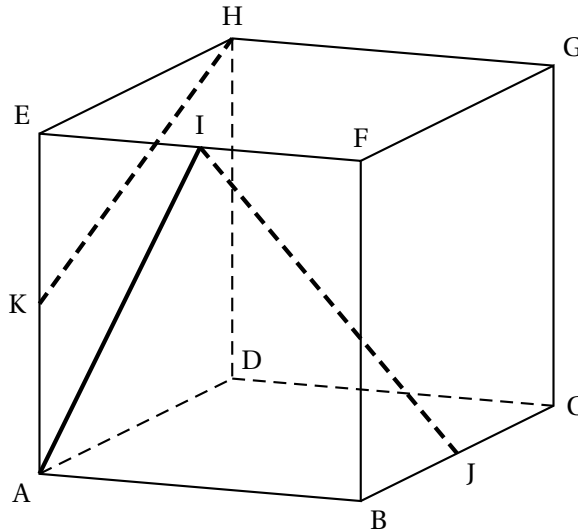
Conclusion :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell = 0$ .

5. a. L'étude précédente a montré que le nombre d'individus décroît, donc le biologiste a raison puisque la limite de la suite du nombre d'individus est égale à zéro.

- b. L'algorithme calcule les termes de la suite tant que ceux-ci sont supérieurs à 0,02

Il s'arrête à  $n = 11$  car  $u_{10} \approx 0,019$

L'espèce sera donc menacée d'extinction en 2031.

**EXERCICE 3****5 points****Commun à tous les candidats**

En prenant le repère orthonormé  $(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$  on a :

$$A(0; 0; 0), B(1; 0; 0), C(1; 1; 0), D(0; 1; 0), E(0; 0; 1)$$

$$F(1; 0; 1), G(1; 1; 1), H(0; 1; 1), I(0,5; 0; 1), J(1; 0,5; 0), K(0; 0; 0,5)$$

1. On a  $\overrightarrow{AI}(0,5; 0; 1)$  et  $\overrightarrow{KH}(0; 1; 0,5)$  : ces vecteurs ne sont pas colinéaires, donc les droites (AI) et (KH) ne sont pas parallèles.
2. **a.** Voir plus haut.  
**b.** On a  $\overrightarrow{IJ}(0,5; 0,5; -1)$ ,  $\overrightarrow{AE}(0; 0; 1)$   $\overrightarrow{AC}(1; 1; 0)$ .  
On a  $2\overrightarrow{IJ} + 2\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AC}$ .  
Le vecteur  $\overrightarrow{AC}$  est donc une combinaison des vecteurs  $\overrightarrow{IJ}$  et  $\overrightarrow{AE}$  : ces trois vecteurs sont donc coplanaires.
3.  $d_1$  a pour vecteur directeur  $\overrightarrow{u_1}(1; -2; 3)$  et  $d_2$  a pour vecteur directeur  $\overrightarrow{u_2}(1; 1; 2)$  : ces vecteurs ne sont pas colinéaires, donc les droites  $d_1$  et  $d_2$  ne sont pas parallèles
4. Le plan a pour vecteur normal le vecteur  $\overrightarrow{p}(1; 3; -2)$  et  $d_2$  a pour vecteur directeur  $\overrightarrow{u_2}(1; 1; 2)$ .  
Or  $\overrightarrow{p} \cdot \overrightarrow{u_2} = 1 + 3 - 4 = 0$  : les vecteurs sont orthogonaux donc la droite  $d_2$  est parallèle au plan  $\mathcal{P}$ .
5. **Méthode 1**  
Soit  $\Delta$  la perpendiculaire à  $\mathcal{P}$  contenant M. Cette droite a pour vecteur directeur le vecteur  $\overrightarrow{p}$ , donc une équation paramétrique de  $\Delta$  est :

$$\begin{cases} x = 5 + 1t \\ y = 3 + 3t, t \in \mathbb{R}. \\ z = 1 - 2t \end{cases}$$

Le projeté L, de M sur le plan  $\mathcal{P}$  a ses coordonnées qui vérifient les quatre équations :

$$\begin{cases} x = 5 + 1t \\ y = 3 + 3t \\ z = 1 - 2t \\ x + 3y - 2z + 2 = 0 \end{cases}, t \in \mathbb{R}. \Rightarrow 5 + t + 3(3 + 3t) - 2(1 - 2t) + 2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$5 + t + 9 + 9t - 2 + 4t + 2 = 0 \Leftrightarrow 14t + 14 = 0 \Leftrightarrow t + 1 = 0 \Leftrightarrow t = -1.$$

En reportant dans les trois premières équations du système, on trouve les coordonnées de L projeté orthogonal de M sur  $\mathcal{P}$  :

$$\begin{cases} x = 5 - 1 \\ y = 3 + 3 \times (-1) \\ z = 1 - 2 \times (-1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ y = 0 \\ z = 3 \end{cases}$$

Donc le projeté orthogonal de M sur le plan  $\mathcal{P}$  est le point L(4; 0; 3).

### Méthode 2

On a  $\overrightarrow{ML}(-1; -3; 2)$ , donc  $\overrightarrow{ML} = -\vec{p}$  est un vecteur normal au plan  $\mathcal{P}$ .

D'autre part L(4; 0; 3)  $\in \mathcal{P} \Leftrightarrow 4 + 3 \times 0 - 2 \times 3 + 2 = 6 - 6 = 0$  est vraie, donc L est le projeté orthogonal de M sur le plan  $\mathcal{P}$ .

### EXERCICE AU CHOIX DU CANDIDAT

Le candidat doit traiter un seul des deux exercices A ou B.

Il indique sur sa copie l'exercice choisi : exercice A ou exercice B.

#### Exercice A

5 points

**Affirmation 1 :** Pour tous réels  $a$  et  $b$ ,  $(e^{a+b})^2 = e^{2(a+b)} = e^{2a+2b} = e^{2a} \times e^{2b}$ . Donc l'affirmation est fausse.

**Affirmation 2 :** Une équation de la tangente  $t$  au point A d'abscisse 0 à la courbe représentative de la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = -2 + (3 - x)e^x$  est :

$$M(x; y) \in t \Leftrightarrow y - f(0) = f'(0)(x - 0).$$

$$\text{Or } f(0) = -2 + 3e^0 = -2 + 3 = 1 \text{ et}$$

$$f'(x) = -e^x + (3 - x)e^x = (2 - x)e^x, \text{ d'où } f'(0) = 2e^0 = 2.$$

Donc  $M(x; y) \in t \Leftrightarrow y - 1 = 2(x - 0) \Leftrightarrow y = 2x + 1$ . L'affirmation est vraie.

**Affirmation 3 :** On a quel que soit le réel  $x$  :  $e^{2x} - e^x + \frac{3}{x} = e^x \left( e^x - 1 + \frac{3}{xe^x} \right)$ .

$$\text{On a } \lim_{x \rightarrow +\infty} xe^x = +\infty, \text{ donc } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3}{xe^x} = 0.$$

Par somme de limites  $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x - 1 + \frac{3}{xe^x} = +\infty$  et par produit de limites :

$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x \left( e^x - 1 + \frac{3}{xe^x} \right) = +\infty$ . L'affirmation est fausse.

**Affirmation 4 :** Soit la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = 1 - x + e^{-x}$

$f$  somme de fonctions dérivables sur  $\mathbb{R}$  est dérivable et sur cet intervalle :

$f'(x) = -1 - e^{-x} = -(1 + e^{-x}) < 0$  car quel que soit le réel  $x$ ,  $e^{-x} > 0$ , donc  $1 + e^{-x} > 1$  puis  $-(1 + e^{-x}) < -1 < 0$ .

La fonction  $f$  est strictement décroissante sur  $\mathbb{R}$ .

On a  $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-x} = +\infty$ , et  $\lim_{x \rightarrow -\infty} -x = +\infty$  donc par somme de limites  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$ .

De même  $\lim_{x \rightarrow +\infty} -x = -\infty$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} = 0$ , d'où par somme de limites :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$ .

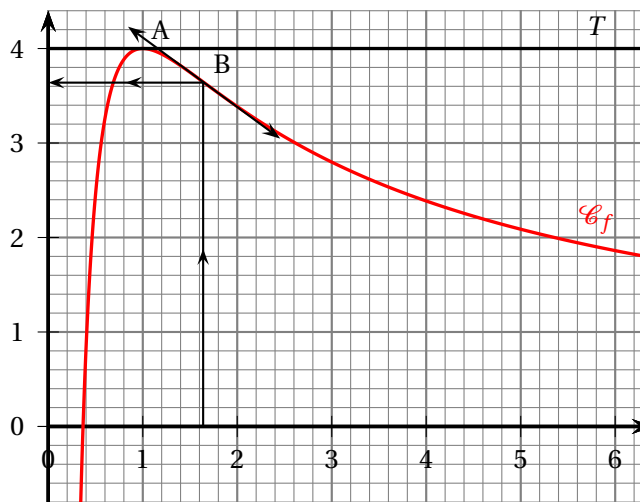
D'après le théorème des valeurs intermédiaires il existe donc  $x_0 \in \mathbb{R}$  tel que  $f(x_0) = 0$ .

Comme  $f(0) = 1 + 1 = 2 > 0$  et  $f(2) = 1 - 2 + e^{-2} \approx -0,86 < 0$ , on a bien  $0 < x_0 < 2$ . L'affirmation est vraie.

**Affirmation 5 :** On a  $g'(x) = 2x - 5 + e^x$  et  $g''(x) = 2 + e^x > 0$  comme somme de deux termes supérieurs à zéro. la fonction  $g$  est donc convexe sur  $\mathbb{R}$ . L'affirmation est vraie.

## EXERCICE B

5 points



1.  $A(1 ; 4) \in \mathcal{C}_f$ , donc  $f(1) = 4$  et la courbe  $\mathcal{C}_f$  admet une tangente horizontale  $T$  au point  $A(1 ; 4)$ ; le coefficient directeur de cette tangente en ce point est nul ou encore le nombre dérivé est nul :  $f'(1) = 0$ .

$$f(x) = \frac{a + b \ln x}{x} \text{ où } a \text{ et } b \text{ sont deux nombres réels.}$$

2.  $f$  est une fonction quotient de fonctions dérivables sur  $]0 ; +\infty[$ , le dénominateur ne s'annulant pas et sur cet intervalle :

$$f'(x) = \frac{\frac{b}{x} \times x - 1(a + b \ln x)}{x^2} = \frac{b - a - b \ln x}{x^2}.$$

3. En utilisant les résultats du 1. :

$$f(1) = \frac{a + b \ln 1}{1} = 4 \iff a = 4;$$

$$f'(1) = \frac{b - 4 - b \ln 1}{1^2} = 0 \iff b - 4 = 0 \iff b = 4.$$

Dans la suite de l'exercice, on admet que la fonction  $f$  est définie pour tout réel  $x$  de l'intervalle  $]0; +\infty[$  par :

$$f(x) = \frac{4 + 4 \ln x}{x}.$$

4. • On sait que  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln x}{x} = -\infty$ , donc  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -\infty$ ;

• On a  $f(x) = \frac{4}{x} + \frac{4 \ln x}{x}$ .

On a  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4}{x} = 0$  et on sait que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4 \ln x}{x} = 0$ , donc par somme de limites :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0.$$

5. On a donc sur  $]0; +\infty[$ ,  $f'(x) = \frac{-4 \ln x}{x^2}$  qui a pour signe celui de  $-4 \ln x$ .

On sait que sur  $]0; 1[$ ,  $\ln x < 0$ , donc  $f'(x) > 0$  sur  $]0; 1[$ ;

Par contre sur  $]1; +\infty[$ ,  $\ln x > 0$ , donc  $f'(x) < 0$  sur  $]1; +\infty[$ ;

$f'(1) = 0$ , donc le point de coordonnées  $(1; 4)$  est le maximum de la fonction sur  $]0; +\infty[$ .

La fonction  $f$  est donc croissante sur  $]0; 1[$  de  $-\infty$  à 4, puis décroissante sur  $]1; +\infty[$  de 4 à 0 avec un maximum 4 pour  $x = 1$ .

6.  $f'$  étant une fonction quotient de fonctions dérivables sur  $]0; +\infty[$ , le dénominateur ne s'annulant pas est dérivable et sur cet intervalle :

$$f''(x) = \frac{-4 \times \frac{1}{x} \times x^2 - 2x \times (-4 \ln x)}{x^4} = \frac{-4x + 8x \ln x}{x^4} = \frac{-4 + 8 \ln x}{x^3}.$$

7. La courbe présente un point d'inflexion lorsque la dérivée seconde s'annule. Or :

$$f''(x) = 0 \iff \frac{-4 + 8 \ln x}{x^3} = 0 \iff -4 + 8 \ln x = 0 \iff -1 + 2 \ln x = 0 \iff \ln x = \frac{1}{2} \iff x = e^{\frac{1}{2}} \approx 1,649 \text{ (ou } \sqrt{e}\text{)}.$$

$$\text{L'ordonnée de ce point unique d'inflexion est } f\left(e^{\frac{1}{2}}\right) = \frac{4 + 4 \times \frac{1}{2}}{e^{\frac{1}{2}}} = \frac{6}{e^{\frac{1}{2}}} = \frac{6}{\sqrt{e}} \approx 3,639.$$