Corrigé du baccalauréat Asie 7 juin 2021 Jour 1
ÉPREUVE D'ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

Le candidat traite 4 exercices : les exercices 1, 2 et 3 communs à tous les candidats et un seul des deux exercices A ou B.

EXERCICE 1 **5 points**
Commun à tous les candidats

En 2020, une influenceuse sur les réseaux sociaux compte 1 000 abonnés à son profil. On modélise le nombre d'abonnés ainsi : chaque année, elle perd 10 % de ses abonnés auxquels s'ajoutent 250 nouveaux abonnés.
Pour tout entier naturel n, on note u_n le nombre d'abonnés à son profil en l'année $(2020+n)$, suivant cette modélisation. Ainsi $u_0 = 1\,000$.

1. On a donc $u_1 = 1\,000 \times \left(1 - \dfrac{10}{100}\right) + 250 = 1\,000 \times 0,9 + 250 = 900 + 250 = 1\,150$.
2. Enlever 10 % c'est multiplier par $1 - \dfrac{10}{100} = 1 - 0,10 = 0,90$.
   Le nombre d'abonnés de l'année précédente est donc multiplié par 0,9 ; on ajoute ensuite chaque année 250 nouveaux abonnés, donc pour tout naturel n :
   $$u_{n+1} = 0,9u_n + 250.$$
3. $u(10)$ donne le nombre d'abonnés au bout de 10 ans ; une calculatrice donne $\approx 1\,977$.
4. **a.** *Initialisation :* on a $u_0 = 1\,000 \leqslant 2\,500$: la relation est vraie au rang 0 ;
   Hérédité : on suppose que pour $n \in \mathbb{N}$, on ait $u_n \leqslant 2\,500$.
   La multiplication par $0,9 > 0$ respectant l'ordre, on a donc $0,9u_n \leqslant 0,9 \times 2\,500$ ou $0,9u_n \leqslant 2\,250$, puis en ajoutant 250 à chaque membre :
   $0,9u_n + 250 \leqslant 2\,250 + 250$, soit $u_{n+1} \leqslant 2\,500$: la relation est encore vraie au rang $n+1$.
   La relation est vraie au rang 0 et si elle est vraie au rang $n \in \mathbb{N}$, elle est vraie au rang $n+1$: d'après le principe de récurrence, quel que soit $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leqslant 2\,500$.

   b. Soit $n \in \mathbb{N}$, on a $u_{n+1} - u_n = 0,9u_n + 250 - u_n = -0,1u_n + 250$.
   Or d'après la question précédente : $u_n \leqslant 2\,500$, puis $0,1u_n \leqslant 0,1 \times 2\,500$ ou encore $0,1u_n \leqslant 250$, soit en prenant les opposés : $-250 \leqslant -0,1u_n$ et en ajoutant à chaque membre 250 : $0 \leqslant -0,1u_n + 250$.
   On a donc pour $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n \geqslant 0$ ou $u_{n+1} \geqslant u_n$: la suite (u_n) est croissante.

   c. La suite (u_n) est croissante (d'après 4. b.) et majorée par 2 500 (d'après 4. a.) : elle converge donc vers une limite inférieure ou égale à 2 500.
5. **a.** Pour $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = u_{n+1} - 2\,500 = 0,9u_n + 250 - 2\,500$, soit
   $v_{n+1} = 0,9u_n - 2\,250 = 0,9\,(u_n - 2\,500) = 0,9v_n$.
   L'égalité vraie quel que soit $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = 0,9v_n$ montre que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison 0,9 et de terme initial $v_0 = u_0 - 2\,500 = 1\,000 - 2\,500 = -1\,500$.

b. On sait que, quel que soit $n \in \mathbb{N}$, $v_n = v_0 \times 0{,}9^n = -1\,500 \times 0{,}9^n$.
Or $v_n = u_n - 2\,500 \iff u_n = v_n + 2\,500 = 2\,500 - 1\,500 \times 0{,}9^n$.

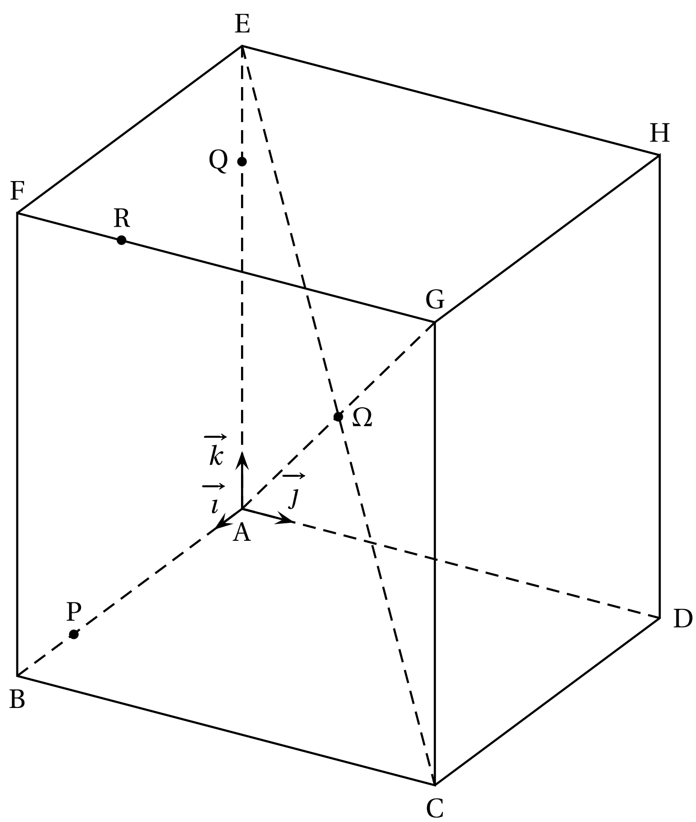
c. Comme $0 < 0{,}9 < 1$, on sait que $\lim\limits_{n \to +\infty} 0{,}9^n = 0$ et, par suite, par produit de limites, $\lim\limits_{n \to +\infty} -1\,500 \times 0{,}9^n = 0$ et finalement $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 2\,500$.

6. Écrire un programme qui permet de déterminer en quelle année le nombre d'abonnés dépassera 2 200.
Déterminer cette année.

```
n = 0
u = 1000
  while u < 2200 :
    u = 0,9*u + 250
    n = n+1
  return n
```

Le programme s'arrêtera la 16^{e} année.

EXERCICE 2 commun à tous les candidats **5 points**



Partie I

1. On a P(6 ; 0 ; 0) et Q(0 ; 0 ; 6).

2. On a $\overrightarrow{\text{PQ}}\begin{pmatrix}-6\\0\\6\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{\text{PR}}\begin{pmatrix}2\\2\\8\end{pmatrix}$.

✦ $\overrightarrow{n}\cdot\overrightarrow{\text{PQ}} = -6+0+6=0$: les vecteurs $\overrightarrow{n}$ et $\overrightarrow{\text{PQ}}$ sont orthogonaux;

✦ $\overrightarrow{n}\cdot\overrightarrow{\text{PR}} = 2-10+8=0$: les vecteurs $\overrightarrow{n}$ et $\overrightarrow{\text{PR}}$ sont orthogonaux.

Conclusion : le vecteur $\overrightarrow{n}$ orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan PQR est normal à ce plan.

3. D'après le résultat précédent :

$M(x\,;\,y\,;\,z)\in(\text{PQR}) \iff 1x-5y+1z+d=0$, avec $d\in\mathbb{R}$.

Or $\text{P}(6;0;0)\in(\text{PQR}) \iff 1\times6-5\times0+1\times0+d=0 \iff d=-6$.

Donc $M(x\,;\,y\,;\,z)\in(\text{PQR}) \iff x-5y+z-6=0$.

Partie II

1. ✦ Les plans (ABCD) et (EFGH) sont parallèles, donc les droites (AC) et (EG) sont parallèles;

✦ Les droites (AE) et (CG) sont perpendiculaires au plan (ABCD), elles sont donc parallèles.

Le quadrilatère (AEGC) a ses côtés opposés parallèles; c'est donc un parallélogramme; ses diagonales [AG] et [CE] ont donc le même milieu Ω.

Comme $\text{G}(8;8;8)$, les coordonnées de Ω sont donc $\left(\dfrac{0+8}{2}\,;\,\dfrac{0+8}{2}\,;\,\dfrac{0+8}{2}\right)=(4\,;\,4\,;\,4)$.

2. La droite (d) a donc pour vecteur directeur $\overrightarrow{n}$ et contient Ω, donc :

$M(x\,;\,y\,;\,z)\in(d) \iff \overrightarrow{\Omega M}=t\,\overrightarrow{n}$, avec $t\in\mathbb{R}$, soit :

$$\left\{\begin{array}{lcl} x-4 &=& t\times1\\ y-4 &=& t\times(-5)\\ z-4 &=& t\times1\end{array}\right.,\ t\in\mathbb{R} \iff \left\{\begin{array}{lcl} x &=& 4+t\\ y &=& 4-5t\\ z &=& 4+t\end{array}\right.,\ t\in\mathbb{R}.$$

3. L est le projeté orthogonal du point Ω sur le plan (PQR) donc la droite (ΩL) est perpendiculaire au plan (PQR), c'est donc la droite (d).

L est donc le point commun au plan (PQR) et à la droite (d), ses coordonnées vérifient donc le système :

$$\left\{\begin{array}{lcl} x &=& 4+t\\ y &=& 4-5t\\ z &=& 4+t\\ x-5y+z-6 &=& 0\end{array}\right.,\ t\in\mathbb{R}$$

On a donc :

$$\begin{aligned}
x-5y+z-6=0 &\iff 4+t-5(4-5t)+4+t-6=0\\
&\iff 2+2t-20+25t=0\\
&\iff 27t=18\\
&\iff 9\times 3t=9\times 2\\
&\iff 3t=2\\
&\iff t=\frac{2}{3}.
\end{aligned}$$

En reportant cette valeur de t dans les trois premières équations du système, on trouve que $\mathrm{L}\left(\frac{14}{3}\ ;\ \frac{2}{3}\ ;\ \frac{14}{3}\right)$.

4. Puisque L est le projeté orthogonal de Ω sur le plan (PQR), la distance de Ω à ce plan est la distance ΩL; or :

$$\begin{aligned}
\Omega\mathrm{L}^2 &= \left(\frac{14}{3}-4\right)^2+\left(\frac{2}{3}-4\right)^2+\left(\frac{14}{3}-4\right)^2\\
&= \left(\frac{2}{3}\right)^2+\left(-\frac{10}{3}\right)^2+\left(\frac{2}{3}\right)^2\\
&= \frac{4+100+4}{9}\\
&= \frac{108}{9}\\
&= 12.
\end{aligned}$$

On a donc $\Omega\mathrm{L}=\sqrt{12}=\sqrt{4\times 3}=2\sqrt{3}$.

EXERCICE 3 commun à tous les candidats **5 points**

1. **a.** Il y a 7 tirages contenant la lettre A, puis
6 tirages contenant la lettre B (le tirage AB étant le même que le tirage BA),
5 tirages contenant la lettre C, etc.
Il y a donc : $7+6+5+4+3+2+1=\dfrac{7\times 8}{2}=7\times 4=28$ tirages différents.

b. Les tirages gagnant sont les 6 tirages contenant la lettre A et une consonne et les 6 contenanr la lettre E et une consonne : il y a donc $6+6=12$ tirages gagants.
La probabilité que le joueur gagne à ce jeu est donc égale à $\dfrac{12}{28}=\dfrac{4\times 3}{4\times 7}=\dfrac{3}{7}$.

2. **a.** On a $P(G=10-k)=\dfrac{3}{7}$ et $P(G=-k)=\dfrac{4}{7}\cdot$ D'où le tableau :

G	$-k$	$10-k$
$P(G=...)$	$\frac{4}{7}$	$\frac{3}{7}$

b. L'espérance mathématique de la variable aléatoire G est égale à
$E(G) = -k \times \dfrac{4}{7} + (10-k) \times \dfrac{3}{7} = \dfrac{-4k+30-3k}{7} = \dfrac{30-7k}{7}$.
Le jeu est favorable au joueur si :
$E(G) > 0 \iff \dfrac{30-7k}{7} \iff 30-7k > 0 \iff 7k < 30 \iff k < \dfrac{30}{7}$.
$\dfrac{30}{7} \approx 4{,}3$.
La somme payée au départ pour que le jeu reste favorable au joueur ne doit pas dépasser 4 €.

3. **a.** Le tirage par un joueur est indépendant de celui des autres et chacun a une probabilité de gagner de $\dfrac{3}{7}$; X suit donc une loi binomiale de paramètres $n = 10$ et $p = \dfrac{3}{7}$.

b. On a $p(X=4) = \binom{10}{4}\left(\dfrac{3}{7}\right)^4\left(1-\dfrac{3}{7}\right)^{10-4} = 210 \times \left(\dfrac{3}{7}\right)^4 \times \left(\dfrac{4}{7}\right)^6 \approx 0{,}2466$, soit 0,247 au millième près.

c. La calculatrice donne $p(X \leqslant 4) \approx 0,560$ donc
$p(X \geqslant 5) = 1 - p(X \leqslant 4) \approx (1-0,560)$.
Finalement : $p(X \geqslant 5) \approx 0,440$.
La probabilité qu'il y ait au moins 5 gagnants sur 10 joueurs est d'environ 0,440.

d. La calculatrice donne :
$p(X \leqslant 5) \approx 0,782$ et $p(X \leqslant 6) \approx 0,921$, donc le plus petit entier n tel que
$P(X \leqslant n) \geqslant 0,9$ est donc $n = 6$.

EXERCICE au choix du candidat **5 points**

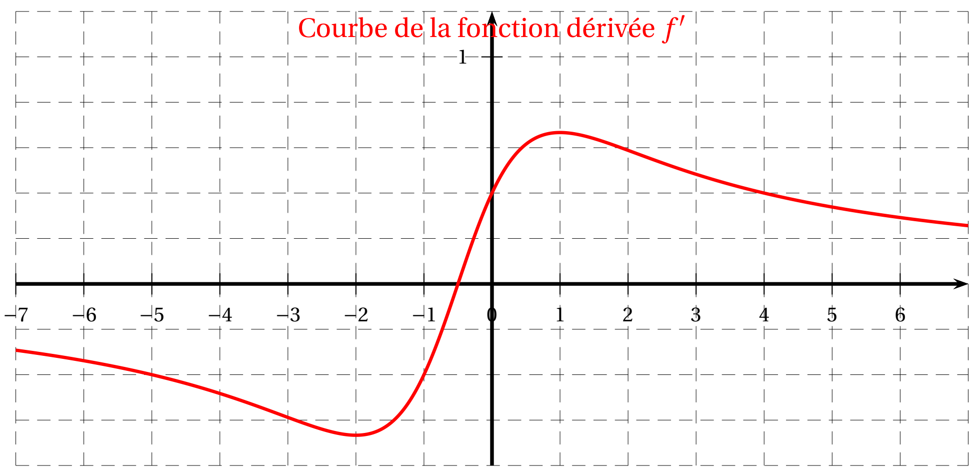
Le candidat doit traiter UN SEUL des deux exercices A ou B
Il indique sur sa copie l'exercice choisi : exercice A ou exercice B

EXERCICE – A

Principaux domaines abordés
– convexité
– fonction logarithme

Partie I : lectures graphiques

f désigne une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.
On donne ci-dessous la courbe représentative de la fonction dérivée f'.



1. On lit $f'(0) = 0,4 = \frac{2}{5}$.
2. a. D'après la figure :
   - $f'(x)$ est croissante si $x \in [-2\ ;\ 1]$;
   - $f'(x)$ est décroissante si $x < -2$ et si $x > 1$.

   b.
   - $f'\left(-\frac{1}{2}\right) = 0$.

   Donc $f''(x) > 0$ sur l'intervalle $[-2\ ;\ 1]$; la fonction f est convexe sur l'intervalle $[-2\ ;\ 1]$.

Partie II : étude de fonction

La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \ln\left(x^2 + x + \frac{5}{2}\right).$$

1. ✦ On a $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2+x+\dfrac{5}{2} = +\infty$, d'où par composition de limites $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

✦ On a $x^2+x+\dfrac{5}{2} = x^2\left(1+\dfrac{1}{x}+\dfrac{5}{2x^2}\right)$.

Donc $f(x) = \ln x^2\left(1+\dfrac{1}{x}+\dfrac{5}{2x^2}\right) = \ln x^2 + \ln\left(1+\dfrac{1}{x}+\dfrac{5}{2x^2}\right)$.

Or $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1}{x} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{5}{2x^2x} = 0$, donc $\lim\limits_{x\to-\infty} 1+\dfrac{1}{x}+\dfrac{5}{2x^2} = 1$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} \ln\left(1+\dfrac{1}{x}+\dfrac{5}{2x^2}\right) = \ln 1 = 0$.

Finalement :

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \ln x^2 = +\infty$.

2. On a $f(x) = \ln u(x)$, avec $u(x) = x^2+x+\dfrac{5}{2}$.

u étant dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour le trinôme $x^2+x+\dfrac{5}{2}$, $\Delta = 1-10 = -9 < 0$, donc

$x^2+x+\dfrac{5}{2} > 0$ quel que soit le réel x.

La fonction $\ln u$ est donc dérivable sur $\mathbb{R}$ et sur cet intervalle :

$(\ln u)' = \dfrac{u'(x)}{u(x)} = \dfrac{2x+1}{x^2+x+\dfrac{5}{2}}$.

Conclusion : quel que soit $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = \dfrac{2x+1}{x^2+x+\dfrac{5}{2}}$.

3. On a vu que $x^2+x+\dfrac{5}{2} > 0$ sur $\mathbb{R}$; le signe de $f'(x)$ est donc celui de $2x+1$:

✦ $f'(x) > 0 \iff 2x+1 > 0 \iff x > -\dfrac{1}{2}$: la fonction f est croissante sur $\left]-\dfrac{1}{2}\,;\,+\infty\right[$;

✦ $f'(x) < 0 \iff 2x+1 < 0 \iff x < -\dfrac{1}{2}$: la fonction f est décroissante sur $\left]-\infty\,;\,-\dfrac{1}{2}\right[$.

On a $f\left(-\dfrac{1}{2}\right) = \ln\left(\left(-\dfrac{1}{2}\right)^2 - \dfrac{1}{2} + \dfrac{5}{2}\right) = \ln\left(\dfrac{1}{4} - \dfrac{1}{2} + \dfrac{5}{2}\right) = \ln\dfrac{9}{4}$.

D'où le tableau de variations de f :

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		$+\infty$
f	$+\infty$	$\searrow$	$\ln\frac{9}{4}$	$\nearrow$	$+\infty$

4. **a.** Dans la tableau précédent $f\left(-\dfrac{1}{2}\right) = \ln\dfrac{9}{4} \approx 0,81$.

Sur l'intervalle $\left[-\dfrac{1}{2}\,;\,+\infty\right[$ la fonction f est continue car dérivable et comme $2 \in \left[\ln\frac{9}{4}\,;\,+\infty\right[$, il existe d'après le théorème des valeurs intermédiaires un réel unique $\alpha \in \left[-\dfrac{1}{2}\,;\,+\infty\right[$ tel que $f(\alpha) = 2$.

b. La calculatrice donne :
$f(1) \approx 1,5$ et $f(2) \approx 2,14$, donc $\alpha \in]1\,;\,2[$;
$f(1,7) \approx 1,96$ et $f(1,8) \approx 2,02$, donc $\alpha \in]1,7\,;\,1,8[$;
$f(1,76) \approx 1,995$ et $f(1,77) \approx 2,002$, donc $\alpha \in]1,76\,;\,1,77[$.
Conclusion $\alpha \approx 1,8$ à 10^{-1} près.

5.

La fonction a un point d'inflexion si en ce point sa dérivée seconde s'annule en changeant de signe.

On a $f'(x) = \dfrac{2x+1}{x^2+x+\dfrac{5}{2}}$: cette fonction est dérivable car le dénominateur ne s'annule pas, donc sur $\mathbb{R}$:

$f''(x) = \dfrac{2\left(x^2+x+\frac{5}{2}\right)-(2x+1)(2x+1)}{\left(x^2+x+\frac{5}{2}\right)^2} = \dfrac{2x^2+2x+5-4x^2-4x-1}{\left(x^2+x+\frac{5}{2}\right)^2} =$
$\dfrac{-2x^2-2x+4}{\left(x^2+x+\frac{5}{2}\right)^2} = \dfrac{-2\left(x^2+x-2\right)}{\left(x^2+x+\frac{5}{2}\right)^2}; f''(x) = \dfrac{-2\left[\left(x+\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{4}-2\right]}{\left(x^2+x+\frac{5}{2}\right)^2} =$
$\dfrac{-2\left[\left(x+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{9}{4}\right]}{\left(x^2+x+\frac{5}{2}\right)^2} = \dfrac{-2\left(x+\frac{1}{2}+\frac{3}{2}\right)\left(x+\frac{1}{2}-\frac{3}{2}\right)}{\left(x^2+x+\frac{5}{2}\right)^2} = \dfrac{-2(x+2)(x-1)}{\left(x^2+x+\frac{5}{2}\right)^2}.$

Comme $\left(x^2+x+\frac{5}{2}\right)^2 > 0$, quel que soit le réel x, le signe de $f''(x)$ est celui du numérateur $-2(x+2)(x-1) = 2(x+2)(1-x)$, soit celui du trinôme $(x+2)(1-x)$. On en déduit le

Tableau de signes :

x	$-\infty$		-2		1		$+\infty$
$x+2$		$-$	0	$+$		$+$	
$1-x$		$+$		$+$	0	$-$	
$(x+2)(1-x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

On constate que la dérivée seconde s'annule en changeant de signe en -2 et en 1. La courbe a donc deux points d'inflexion.

EXERCICE – B

Principaux domaines abordés
– Étude de fonction, fonction exponentielle
– Équations différentielles

Partie I

$$y' = -0,4y + 0,4$$

1. **a.** $y = K$, avec $K \in \mathbb{R}$ est solution de l'équation, si, avec $y' = 0$,
$0 = -0,4K + 0,4 \iff 0,4K = 0,4 \iff K = 1$

b. ✦ On sait que les solutions de l'équation différentielle $y' = -0,4y$ sont les fonctions définies par : $t \longmapsto y = C\mathrm{e}^{-0,4t}$, avec $C \in \mathbb{R}$;

✦ Les solutions de l'équation $y' = -0,4u + 0,4$ sont donc les fonctions :

$$t \longmapsto y = 1 + C\mathrm{e}^{-0,4t}, \text{ avec } C \in \mathbb{R}.$$

c. g définie par $g(t) = 1 + C\mathrm{e}^{-0,4t}$ vérifie :
$g(0) = 10 \iff 1 + C\mathrm{e}^{-0,4\times 0} = 10 \iff 1 + C = 10 \iff C = 9.$
On a donc $g(t) = 1 + 9\mathrm{e}^{-0,4t}$

Partie II

1. On sait que $\lim\limits_{t\to+\infty} \mathrm{e}^{-0,4t} = 0$, donc $\lim\limits_{t\to+\infty} p(t) = 1$.

2. g somme de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ est dérivable et sur cet intervalle :
$g'(t) = -0,4 \times 9\mathrm{e}^{-0,4t} = -3,6\mathrm{e}^{-0,4t}$.
Or :
$p(t) = \dfrac{1}{g(t)} \Rightarrow p'(t) = -\dfrac{g'(t)}{(g(t))^2} = -\dfrac{-3,6\mathrm{e}^{-0,4t}}{\left(1+9\mathrm{e}^{-0,4t}\right)^2} = \dfrac{3,6\mathrm{e}^{-0,4t}}{\left(1+9\mathrm{e}^{-0,4t}\right)^2}$ pour tout $t \in [0\,;\,+\infty[$.

3. **a.** Le résultat précédent montre que, comme $3,6 >$, $\mathrm{e}^{-0,4t} >$ quel que soit le réel y, $\left(1+9\mathrm{e}^{-0,4t}\right)^2 > 0$, $p'(t) > 0$ sur $[0\,;\,+\infty[$: la fonction p est strictement croissante sur cet intervalle.
Or $p(0) = \dfrac{1}{1+9} = \dfrac{1}{10} = 0,1$, et $\lim\limits_{t\to+\infty} p(t) = \dfrac{1}{1} = 1$.
Par application du théorème des valeurs intermédiaires comme $\dfrac{1}{2} \in [0\,;\,1]$, il existe un réel unique $\alpha \in [0\,;\,+\infty[$ tel que $p(\alpha) = \dfrac{1}{2}$.

b. La calculatrice donne :
$p(5) \approx 0,45$ et $p(6) \approx 0,55$, donc $5 < \alpha < 6$;
$p(5,4) \approx 0,491$ et $p(5,5) \approx 0,501$, donc $5,4 < \alpha < 5,5$;
$p(5,49) \approx 0,499$ et $p(5,50) \approx 0,501$, donc $5,49 < \alpha < 5,50$.
Conclusion $\alpha \approx 5,5$ à 10^{-1} près.

Partie III

1. ✦ $p'(t) = \dfrac{3,6\mathrm{e}^{-0,4t}}{\left(1+9\mathrm{e}^{-0,4t}\right)^2}$ d'après la question 2.

✦ $0,4p(t)(1-p(t)) = 0,4 \times \dfrac{1}{1+9\mathrm{e}^{-0,4t}} \times \left(1 - \dfrac{1}{1+9\mathrm{e}^{-0,4t}}\right)^2 = 0,4 \times \dfrac{9\mathrm{e}^{-0,4t}}{1+9\mathrm{e}^{-0,4t}} = \dfrac{3,6\mathrm{e}^{-0,4t}}{\left(1+9\mathrm{e}^{-0,4t}\right)^2}$

donc p est solution de l'équation différentielle.
De plus on a vu que $p(0) = \dfrac{1}{10}$.

2.
- $\lim\limits_{t\to+\infty} p(t) = 1$ signifie qu'à long terme toutes les écoles auront accès à internet.
- $\alpha \approx 5,5$ signifie qu'au bout de 5 ans et demi la moitié des écoles aura accès à internet.
- $p(0) = 0,1$ signifie qu'en 2020, 10 % des écoles ont accès à internet.