Corrigé du baccalauréat S Centres étrangers 11 juin 2018

Exercice 1 — 4 points

Pour tous les candidats

Dans une usine, on se propose de tester un prototype de hotte aspirante pour un local industriel.
Avant de lancer la fabrication en série, on réalise l'expérience suivante : dans un local clos équipé du prototype de hotte aspirante, on diffuse du dioxyde de carbone (CO_2) à débit constant.
Dans ce qui suit, t est le temps exprimé en minute.
À l'instant $t = 0$, la hotte est mise en marche et on la laisse fonctionner pendant 20 minutes. Les mesures réalisées permettent de modéliser le taux (en pourcentage) de CO_2 contenu dans le local au bout de t minutes de fonctionnement de la hotte par l'expression $f(t)$, où f est la fonction définie pour tout réel t de l'intervalle $[0\,;\,20]$ par : $f(t) = (0{,}8t + 0{,}2)\,\mathrm{e}^{-0{,}5t} + 0{,}03$.

On donne ci-contre le tableau des variations de la fonction f sur l'intervalle $[0\,;\,20]$.
Ainsi, la valeur $f(0) = 0{,}23$ traduit le fait que le taux de CO_2 à l'instant 0 est égal à 23 %.

t	0		1,75		20
$f'(t)$		+	0	−	
f	0,23	↗		↘	

1. **a.** On trouve à la calculatrice que $f(20) \approx 0{,}031$.

   b. Le taux maximal de CO_2 présent dans le local pendant l'expérience est $f(1{,}75) \approx 0{,}697$ ce qui correspond à 69,7 %.

2. On souhaite que le taux de CO_2 dans le local retrouve une valeur V inférieure ou égale à 3,5 %, c'est-à-dire 0,035.

   a. On complète le tableau des variations de f en plaçant la valeur 0,035 :

t	0		1,75		T		20
f	0,23	↗	$\approx 0{,}687$	↘	0,035	↘	$\approx 0{,}031$

   D'après ce tableau, il n'existe qu'un instant T pour lequel $V = 0{,}035$.
   De plus, $V \leqslant 0{,}035$ pour tout t de l'intervalle $[T\,;\,20]$.

   b. On considère l'algorithme suivant :

```
t ← 1,75
p ← 0,1
V ← 0,7
Tant que V > 0,035
      t ← t + p
      V ← (0,8t + 0,2)e^(−0,5t) + 0,03
Fin Tant que
```

Par approximations successives, on trouve $f(15{,}65) \approx 0{,}0351 > 0{,}035$ et $f(15{,}75) \approx 0{,}0349 < 0{,}035$; donc la valeur de t en sortie d'algorithme est 15,75.

15,75 est une valeur approchée du temps exprimé en minutes à partir duquel le taux de CO_2 sera inférieur à 3,5 % ; ce temps est donc de 15 minutes et 45 secondes.

3. On désigne par V_m le taux moyen (en pourcentage) de CO_2 présent dans le local pendant les 11 premières minutes de fonctionnement de la hotte aspirante.

a. Soit F la fonction définie sur l'intervalle $[0 ; 11]$ par : $F(t) = (-1{,}6t - 3{,}6)\,\mathrm{e}^{-0{,}5t} + 0{,}03t$.

La foncttion F est dérivable sur $\mathbb{R}$ donc sur $[0 ; 11]$ et

$$F'(t) = (-1{,}6) \times \mathrm{e}^{-0{,}5t} + (-1{,}6t - 3{,}6) \times (-0{,}5)\,\mathrm{e}^{-0{,}5t} + 0{,}03 = (-1{,}6 + 0{,}8t + 1{,}8)\,\mathrm{e}^{-0{,}5t} + 0{,}03$$
$$= (0{,}8t + 0{,}2)\,\mathrm{e}^{-0{,}5t} + 0{,}03 = f(t).$$

Donc la fonction F est une primitive de la fonction f sur $[0 ; 11]$.

b. La valeur moyenne V_m de la fonction f sur l'intervalle $[0; 11]$ est

$$\frac{1}{11-0}\int_0^{11} f(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{11}\left[F(11) - F(0)\right] = \frac{1}{11}\left[\left((-17{,}6 - 3{,}6)\,\mathrm{e}^{-5{,}5} + 0{,}33\right) - (-3{,}6)\right] \approx 0{,}349.$$

Le taux moyen de CO_2 pendant les 11 premières minutes est d'environ 34,9 %.

Exercice 2 — 4 points

Pour tous les candidats

1. Un type d'oscilloscope a une durée de vie, exprimée en année, qui peut être modélisée par une variable aléatoire D qui suit une loi exponentielle de paramètre λ.

On sait que la durée de vie moyenne de ce type d'oscilloscope est de 8 ans.

Affirmation 1 : pour un oscilloscope de ce type choisi au hasard et ayant déjà fonctionné 3 ans, la probabilité que la durée de vie soit supérieure ou égale à 10 ans, arrondie au centième, est égale à 0,42.

- On cherche $P_{(D\geqslant 3)}(D \geqslant 10)$. Comme la loi exponentielle est une loi à durée de vie sans vieillissement, $P_{(D\geqslant 3)}(D \geqslant 10) = P(D \geqslant 10-3) = P(D \geqslant 7)$.
- La durée de vie moyenne est de 8 ans, donc la variable aléatoire D a pour espérance mathématique $E(D) = 8$. D'après le cours, $E(D) = \dfrac{1}{\lambda}$ donc $8 = \dfrac{1}{\lambda}$ et donc $\lambda = \dfrac{1}{8}$.
- D'après le cours, $P(D \leqslant t) = 1 - \mathrm{e}^{-\lambda t}$; donc $P(D \geqslant t) = 1 - P(D \leqslant t) = 1 - \left(1 - \mathrm{e}^{-\lambda t}\right) = \mathrm{e}^{-\lambda t}$.
- On en déduit que $P(D \geqslant 7) = \mathrm{e}^{-\frac{1}{8}\times 7} \approx 0{,}42$.

L'affirmation 1 est vraie.

2. En 2016, en France, les forces de l'ordre ont réalisé 9,8 millions de dépistages d'alcoolémie auprès des automobilistes, et 3,1 % de ces dépistages étaient positifs.

Dans une région donnée, le 15 juin 2016, une brigade de gendarmerie a effectué un dépistage sur 200 automobilistes.

Affirmation 2 : en arrondissant au centième, la probabilité que, sur les 200 dépistages, il y ait eu strictement plus de 5 dépistages positifs, est égale à 0,59.

- La proportion de dépistages positifs sur 9,8 millions de dépistages d'alcoolémie est de 3,1 % donc on peut considérer que la probabilité qu'un dépistage soit positif est égale à $p = 0{,}031$.
- On réalise 200 dépistages dont les résultats sont indépendants les uns des autres ; donc la variable aléatoire X qui donne le nombre de dépistages positifs suit la loi binomiale de paramètres $n = 200$ et $p = 0{,}031$.
- On cherche donc $P(X > 5)$ c'est-à-dire $1 - P(X \leqslant 5)$.

- À la calculatrice, on trouve $P(X \leqslant 5) \approx 0{,}41$ donc $P(X > 5) \approx 0{,}59$.

L'affirmation 2 est vraie.

3. On considère dans $\mathbb{R}$ l'équation : $\ln(6x-2)+\ln(2x-1)=\ln(x)$.

Affirmation 3 : l'équation admet deux solutions dans l'intervalle $\left]\frac{1}{2}\,;\,+\infty\right[$.

- Soit $I = \left]\frac{1}{2}\,;\,+\infty\right[$.
  - $\ln(6x-2)$ n'existe que si $6x-2>0$, c'est-à-dire $x > \dfrac{1}{3}$; donc $\ln(6x-2)$ existe si $x \in I$.
  - $\ln(2x-1)$ n'existe que si $2x-1>0$, c'est-à-dire $x > \dfrac{1}{2}$; donc $\ln(2x-1)$ existe si $x \in I$.
  - $\ln(x)$ n'existe que si $x>0$; donc $\ln(x)$ existe si $x \in I$.
- Sur l'intervalle I :
  $\ln(6x-2)+\ln(2x-1)=\ln(x) \iff \ln\big((6x-2)(2x-1)\big)=\ln(x) \iff (6x-2)(2x-1)=x$
  $\iff 12x^2-4x-6x+2=x \iff 12x^2-11x+2=0$
- On résout dans I l'équation $12x^2-11x+2=0$.
  $\Delta = 11^2-4\times 12\times 2 = 25 = 5^2$; $x' = \dfrac{11+5}{2\times 12} = \dfrac{16}{24} = \dfrac{2}{3}$ et $x'' = \dfrac{11-5}{24} = \dfrac{6}{24} = \dfrac{1}{4}$
  $x' \in I$ et $x'' \notin I$ donc l'équation du départ n'admet qu'une solution dans l'intervalle I.

L'affirmation 3 est fausse.

4. On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation : $\left(4z^2-20z+37\right)(2z-7+2\mathrm{i})=0$.

Affirmation 4 : les solutions de l'équation sont les affixes de points appartenant à un même cercle de centre le point P d'affixe 2.

- Les solutions de l'équation $\left(4z^2-20z+37\right)(2z-7+2\mathrm{i})=0$ sont les solutions des deux équations $4z^2-20z+37=0$ et $2z-7+2\mathrm{i}=0$.
- On résout dans $\mathbb{C}$ l'équation $4z^2-20z+37=0$.
  $\Delta = 20^2-4\times 4\times 37 = -192 < 0$; l'équation admet donc deux solutions complexes conjuguées : $z_1 = \dfrac{20+\mathrm{i}\sqrt{192}}{2\times 4} = \dfrac{20+8\mathrm{i}\sqrt{3}}{8} = \dfrac{5}{2}+\mathrm{i}\sqrt{3}$ et $z_2 = \dfrac{5}{2}-\mathrm{i}\sqrt{3}$
- On résout dans $\mathbb{C}$ l'équation $2z-7+2\mathrm{i}=0$: $2z-7+2\mathrm{i}=0 \iff 2z=7-2\mathrm{i} \iff z=\dfrac{7}{2}-\mathrm{i}$
  Cette équation a pour solution le nombre complexe $z_3 = \dfrac{7}{2}-\mathrm{i}$.
- On appelle A, B et C les points d'affixes respectives z_1, z_2 et z_3.
  - $\text{PA} = \left|z_1 - z_{\text{P}}\right| = \left|\dfrac{5}{2}+\mathrm{i}\sqrt{3}-2\right| = \left|\dfrac{1}{2}+\mathrm{i}\sqrt{3}\right| = \sqrt{\dfrac{1}{4}+3} = \sqrt{\dfrac{13}{4}}$
  - $\text{PB} = \left|z_2 - z_{\text{P}}\right| = \left|\dfrac{5}{2}-\mathrm{i}\sqrt{3}-2\right| = \left|\dfrac{1}{2}-\mathrm{i}\sqrt{3}\right| = \sqrt{\dfrac{1}{4}+3} = \sqrt{\dfrac{13}{4}}$
  - $\text{PC} = \left|z_3 - z_{\text{P}}\right| = \left|\dfrac{7}{2}-\mathrm{i}-2\right| = \left|\dfrac{3}{2}-\mathrm{i}\right| = \sqrt{\dfrac{9}{4}+1} = \sqrt{\dfrac{13}{4}}$
- PA = PB = PC donc les solutions de l'équation sont les affixes de trois points situés sur le cercle de centre P d'affixe 2 et de rayon $\dfrac{13}{4}$.

L'affirmation 4 est vraie.

Exercice 3 — 7 points

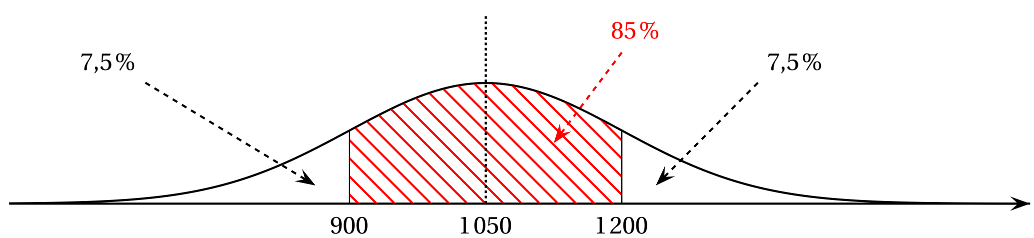
Pour tous les candidats

Un détaillant en fruits et légumes étudie l'évolution de ses ventes de melons afin de pouvoir anticiper ses commandes.

Partie A

Le détaillant constate que ses melons se vendent bien lorsque leur masse est comprise entre 900 g et 1 200 g. Dans la suite, de tels melons sont qualifiés « conformes ».
Le détaillant achète ses melons auprès de trois maraîchers, notés respectivement A, B et C.
Pour les melons du maraîcher A, on modélise la masse en gramme par une variable aléatoire M_{A} qui suit une loi uniforme sur l'intervalle $[850\,;\,x]$, où x est un nombre réel supérieur à 1 200.
La masse en gramme des melons du maraîcher B est modélisée par une variable aléatoire M_{B} qui suit une loi normale de moyenne 1 050 et d'écart-type inconnu σ.
Le maraîcher C affirme, quant à lui, que 80 % des melons de sa production sont conformes.

1. Le détaillant constate que 75 % des melons du maraîcher A sont conformes.
   Autrement dit, la probabilité qu'un melon du maraîcher A soit conforme est 0,75 ; on a donc $P\left(M_{\text{A}} \in [900\,,\,1200]\right) = 0{,}75$.
   Comme la variable aléatoire M_{A} suit une loi uniforme sur $[850\,,\,x]$, on a $P\left(M_{\text{A}} \in [900\,,\,1200]\right) = \dfrac{1200-900}{x-850}$.
   On en déduit que $\dfrac{1200-900}{x-850} = 0{,}75$ ce qui équivaut à $300 = 0{,}75x - 637{,}5$ ou à $937{,}5 = 0{,}75x$ c'est-à-dire $x = 1250$.
2. Le détaillant constate que 85 % des melons fournis par le maraîcher B sont conformes ; autrement dit, $P(900 \leqslant M_{\text{B}} \leqslant 1200) = 0{,}85$.
   D'après les propriétés de la loi normale, $P(M_{\text{B}} \leqslant 900) = P(M_{\text{B}} \geqslant 1200) = \dfrac{1-0{,}85}{2} = 0{,}075$.



On en déduit que $P(M_{\text{B}} \leqslant 1200) = 0{,}075 + 0{,}85 = 0{,}925$.

D'après le cours, on sait que si la variable aléatoire X suit la loi normale de paramètres μ et σ, la variable aléatoire $Z = \dfrac{X-\mu}{\sigma}$ suit la loi normale centrée réduite.

$M_{\text{B}} \leqslant 1200 \iff M_{\text{B}} - 1050 \leqslant 150 \iff \dfrac{M_{\text{B}}-1050}{\sigma} \leqslant \dfrac{150}{\sigma} \iff Z \leqslant \dfrac{150}{\sigma}$ où $Z = \dfrac{M_{\text{B}}-1050}{\sigma}$.

Donc $P(M_{\text{B}} \leqslant 1200) = 0{,}925$ équivaut à $P\left(Z \leqslant \dfrac{150}{\sigma}\right) = 0{,}925$.

Pour Z suivant la loi normale centré réduite, le nombre β tel que $P(Z \leqslant \beta) = 0{,}925$ vaut environ 1,44 (à la calculatrice).

Donc $\dfrac{150}{\sigma} \approx 1{,}44$ donc $\sigma \approx 104$.

La valeur arrondie à l'unité de l'écart-type σ de la variable aléatoire M_{B} est 104.

3. Le détaillant doute de l'affirmation du maraîcher C. Il constate que sur 400 melons livrés par ce maraîcher au cours d'une semaine, seulement 294 sont conformes.

La maraîcher C affirme que 80 % de ses melons sont conformes donc on prend $p = 0{,}80$.

On va tester cette hypothèse sur un échantillon de taille $n = 400$.

$n = 400 \geqslant 30$, $np = 320 \geqslant 5$ et $n(1-p) = 80 \geqslant 5$, donc les conditions sont remplies pour que l'on puisse établir un intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95 % de la proportion de melons conformes dans des échantillons de taille 400 :

$$I = \left[p - 1{,}96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\ ;\ p + 1{,}96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\right] = \left[0{,}8 - 1{,}96\frac{\sqrt{0{,}8\times 0{,}2}}{\sqrt{400}}\ ;\ 0{,}8 + 1{,}96\frac{\sqrt{0{,}8\times 0{,}2}}{\sqrt{400}}\right]$$
$$= [0{,}7608\ ;\ 0{,}8392]$$

Dans l'échantillon testé, il y a 294 melons conformes donc la fréquence des melons conformes dans cet échantillon est $f = \dfrac{294}{400} = 0{,}735$.

$f \notin I$ donc le détaillant a raison de douter de l'affirmation du maraîcher C avec le risque de 5 % de se tromper.

Partie B

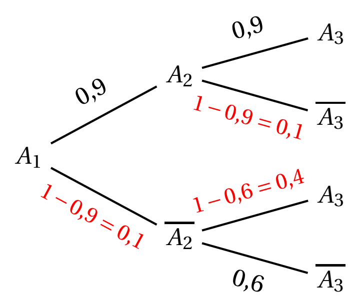
Le détaillant réalise une étude sur ses clients. Il constate que :

— parmi les clients qui achètent un melon une semaine donnée, 90 % d'entre eux achètent un melon la semaine suivante;

— parmi les clients qui n'achètent pas de melon une semaine donnée, 60 % d'entre eux n'achètent pas de melon la semaine suivante.

On choisit au hasard un client ayant acheté un melon au cours de la semaine 1 et, pour $n \geqslant 1$, on note A_n l'évènement : « le client achète un melon au cours de la semaine n ».
On a ainsi $p(A_1) = 1$.

1. **a.** On complète l'arbre de probabilités relatif aux trois premières semaines.



b. D'après la formule des probabilités totales :

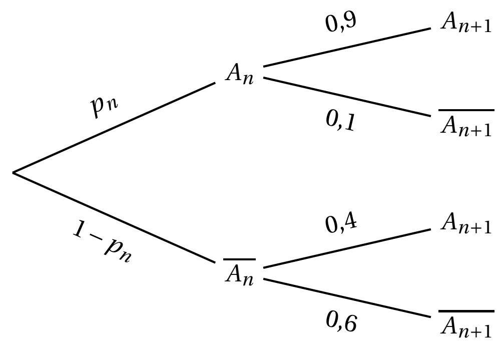
$$P(A_3) = P(A_2 \cap A_3) + P\left(\overline{A_2} \cap A_3\right)$$
$$= P(A_2) \times P_{A_2}(A_3) + P\left(\overline{A_2}\right) \times P_{\overline{A_2}}(A_3)$$
$$= 0{,}9 \times 0{,}9 + 0{,}1 \times 0{,}4 = 0{,}81 + 0{,}04 = 0{,}85$$

c. Sachant que le client achète un melon au cours de la semaine 3, la probabilité qu'il en ait acheté un au cours de la semaine 2 est :

$$P_{A_3}(A_2) = \frac{P(A_2 \cap A_3)}{P(A_3)} = \frac{0{,}9 \times 0{,}9}{0{,}85} \approx 0{,}95.$$

Dans la suite, on pose pour tout entier $n \geqslant 1$: $p_n = P(A_n)$. On a ainsi $p_1 = 1$.

2. On représente un arbre pondéré correspondant aux semaines n et $n+1$:



D'après la formule des probabilités totales :

$p_{n+1} = P(A_{n+1}) = P(A_n \cap A_{n+1}) + P\left(\overline{A_n} \cap A_{n+1}\right) = p_n \times 0{,}9 + \left(1 - p_n\right) \times 0{,}4 = 0{,}5p_n + 0{,}4.$

3. **a.** Soit $\mathscr{P}_n$ la propriété : $p_n > 0{,}8$.

- **Initialisation**

  On sait que $p_1 = 1$ donc $p_1 > 0{,}8$; la propriété est vraie au rang 1.

- **Hérédité**

  Soit un entier naturel $k \geqslant 1$ tel que la propriété soit vraie au rang k, c'est-à-dire $p_k > 0{,}8$. C'est l'hypothèse de récurrence.

  On va démontrer que la propriété est vraie au rang $k+1$.

  D'après l'hypothèse de récurrence, $p_k > 0{,}8$ donc $0{,}5p_k > 0{,}4$ et donc $0{,}5p_k + 0{,}4 > 0{,}8$ qui signifie $p_{k+1} > 0{,}8$. La propriété est donc vraie au rang $k+1$.

- **Conclusion**

  La propriété est vraie pour $n = 1$ et elle est héréditaire pour tout $k \geqslant 1$; d'après le principe de récurrence, elle est vraie pour tout $n \geqslant 1$.

On a donc démontré que, pour tout entier naturel non nul, $p_n > 0{,}8$.

b. Pour tout $n \geqslant 1$, $p_{n+1} - p_n = 0{,}5p_n + 0{,}4 - p_n = 0{,}4 - 0{,}5p_n$.

Or $p_n > 0{,}8$ donc $0{,}5p_n > 0{,}4$ donc $-0{,}5p_n < -0{,}4$ et donc $0{,}4 - 0{,}5p_n < 0$.

On en déduit que, pour tout $n \geqslant 1$, $p_{n+1} - p_n < 0$ et donc que la suite (p_n) est strictement décroissante.

c. Pour tout $n \geqslant 1$, $p_n > 0{,}8$ donc la suite (p_n) est minorée par 0,8.

On a vu aussi que la suite (p_n) était décroissante.

D'après le théorème de la convergence monotone, on peut déduire que la suite (p_n) est convergente.

4. On pose pour tout entier $n \geqslant 1$: $v_n = p_n - 0{,}8$ donc $p_n = v_n + 0{,}8$.

a.
- $v_{n+1} = p_{n+1} - 0{,}8 = 0{,}5p_n + 0{,}4 - 0{,}8 = 0{,}5(v_n + 0{,}8) - 0{,}4 = 0{,}5v_n + 0{,}4 - 0{,}4 = 0{,}5v_n$
- $v_1 = p_1 - 0{,}8 = 1 - 0{,}8 = 0{,}2$

Donc la suite (v_n) est géométrique de raison $q = 0{,}5$ et de premier terme $v_1 = 0{,}2$.

b. On déduit de la question précédente que, pour tout $n \geqslant 1$, $v_n = v_1 \times q^{n-1} = 0{,}2 \times 0{,}5^{n-1}$.

Comme pour tout $n \geqslant 1$, $p_n = v_n + 0{,}8$, on en déduit que $p_n = 0{,}8 + 0{,}2 \times 0{,}5^{n-1}$.

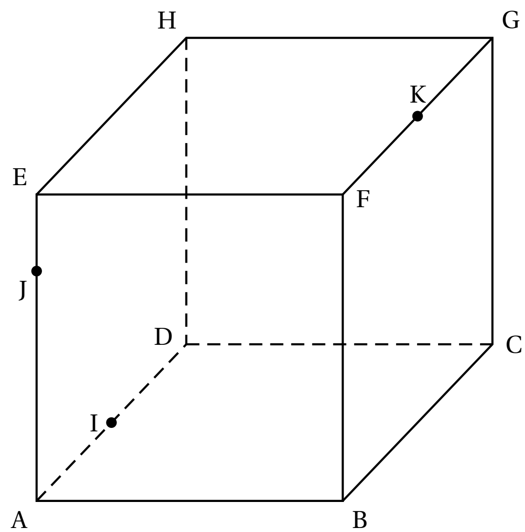
c. La suite (v_n) est géométrique de raison 0,5 et $-1 < 0{,}5 < 1$ donc la suite (v_n) est convergente vers 0. Pour tout $n > 0$, $p_n = v_n + 0{,}8$ donc la suite (p_n) est convergente et a pour limite 0,8.

Exercice 4 5 points

Candidats n'ayant pas suivi la spécialité mathématique

La figure ci-contre représente un cube ABCDEFGH.
Les trois points I, J, K sont définis par les conditions suivantes :

- I est le milieu du segment [AD] ;
- J est tel que $\overrightarrow{AJ} = \dfrac{3}{4}\overrightarrow{AE}$;
- K est le milieu du segment [FG].



Partie A

1. Construction du point P, intersection du plan (IJK) et de la droite (EH) : voir figure.
2.
   - Le point P est le point d'intersection du plan (IJK) et de la droite (EH) ; le point H appartient au plan (EFG) donc la droite (EH) est contenue dans le plan (EFG).
     On en déduit que $P \in (IJK) \cap (EFG)$.
   - Le point K appartient au plan (IJK) et à la droite (FG) qui est contenue dans le plan (EFG).
     On en déduit que $K \in (IJK) \cap (EFG)$.
   - Les plans (IJK) et (EFG) ne sont pas parallèles donc leur intersection est une droite. Les deux points P et K appartiennent à l'intersection des deux plans donc l'intersection des deux plans (IJK) et (EFG) est la droite (PK).

Partie B

On se place désormais dans le repère orthonormé $\left(A\,;\ \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE}\right)$.

On a donc A $\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$, B $\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$, D $\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$ et E $\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$. On a aussi C $\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$, F $\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$, H $\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$ et G $\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$.

1. **a.**
   - Le point I est le milieu de [AD] donc I a pour coordonnées $\begin{pmatrix}0\\\frac{1}{2}\\0\end{pmatrix}$.
   - Le point J est défini par $\overrightarrow{AJ} = \dfrac{3}{4}\overrightarrow{AE}$ et le vecteur $\overrightarrow{AE}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$; donc le point J a pour coordonnées $\begin{pmatrix}0\\0\\\frac{3}{4}\end{pmatrix}$.

- Le point K est le milieu de [FG] donc K a pour coordonnées $\begin{pmatrix}1\\ \frac{1}{2}\\ 1\end{pmatrix}$.

b. Soit $\overrightarrow{n}$ le vecteur de coordonnées $(4\,;\ a\,;\ b)$.

- $\overrightarrow{n}$ est orthogonal à $\overrightarrow{IJ}$ si et seulement si leur produit scalaire est nul.

  Le vecteur $\overrightarrow{IJ}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix}0-0\\ 0-\frac{1}{2}\\ \frac{3}{4}-0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ -\frac{1}{2}\\ \frac{3}{4}\end{pmatrix}$.

  $\overrightarrow{n}\perp\overrightarrow{IJ} \iff \overrightarrow{n}\,.\,\overrightarrow{IJ}=0 \iff 0-\dfrac{a}{2}+\dfrac{3b}{4}=0 \iff 3b=2a$

- $\overrightarrow{n}$ est orthogonal à $\overrightarrow{IK}$ si et seulement si leur produit scalaire est nul.

  Le vecteur $\overrightarrow{IK}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix}1-0\\ \frac{1}{2}-\frac{1}{2}\\ 1-0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\ 0\\ 1\end{pmatrix}$.

  $\overrightarrow{n}\perp\overrightarrow{IK} \iff \overrightarrow{n}\,.\,\overrightarrow{IK}=0 \iff 4+0+b=0 \iff b=-4$

- $b=-4$ et $3b=2a$ donc $a=-6$

Donc le vecteur $\overrightarrow{n}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix}4\\ -6\\ -4\end{pmatrix}$.

c. Le vecteur $\overrightarrow{n}$ est orthogonal aux deux vecteurs non colinéaires $\overrightarrow{IJ}$ et $\overrightarrow{IK}$ donc c'est un vecteur normal au plan (IJK). Ce plan (IJK) contient le point I.

Le plan (IJK) est donc l'ensemble des points M de coordonnées (x,y,z) tels que les vecteurs $\overrightarrow{n}$ et $\overrightarrow{IM}$ soient orthogonaux.

Le vecteur $\overrightarrow{IM}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix}x-0\\ y-\frac{1}{2}\\ z-0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x\\ y-\frac{1}{2}\\ z\end{pmatrix}$.

$\overrightarrow{n}\perp\overrightarrow{IM} \iff \overrightarrow{n}\,.\,\overrightarrow{IM}=0 \iff 4x-6\left(y-\dfrac{1}{2}\right)-4z=0 \iff 4x-6y-4z+3=0$

Le plan (IJK) a donc pour équation cartésienne $4x-6y-4z+3=0$.

2. a. La droite (CG) passe par le point C et a pour vecteur directeur $\overrightarrow{CG}$ égal au vecteur $\overrightarrow{AE}$ de coordonnées $\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 1\end{pmatrix}$.

La droite (CG) est donc l'ensemble des points M de coordonnées (x,y,z) tels que $\overrightarrow{CM}$ soit colinéaire à $\overrightarrow{CG}$, ce qui s'écrit :

$\overrightarrow{CM}=t\overrightarrow{CG} \iff \left\{\begin{array}{rcl} x-1 &=& 0t\\ y-1 &=& 0t\\ z-0 &=& 1t\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} x &=& 1\\ y &=& 1\\ z &=& t\end{array}\right.$ avec $t\in\mathbb{R}$.

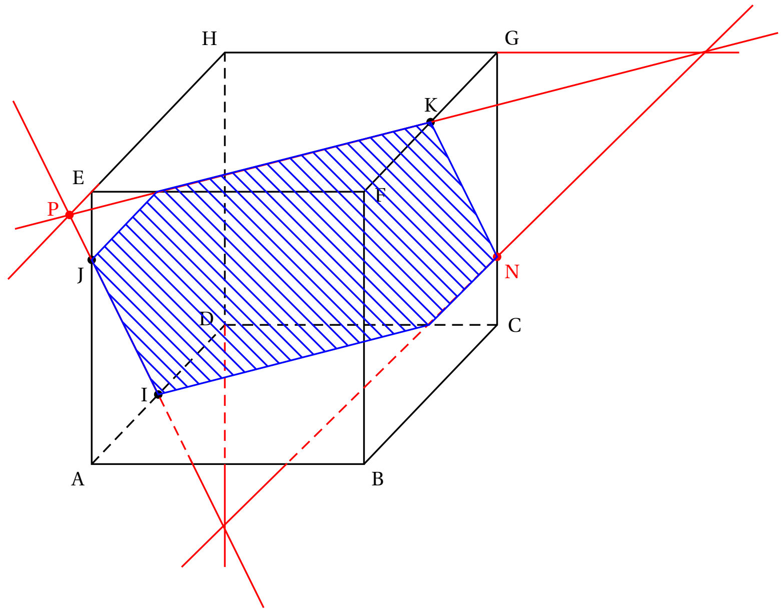
La droite (CG) a donc pour représentation paramétrique $\left\{\begin{array}{rcl} x &=& 1\\ y &=& 1\\ z &=& t\end{array}\right.\quad t\in\mathbb{R}$.

b. Les coordonnées (x,y,z) du point N, intersection du plan (IJK) et de la droite (CG) vérifient le système $\left\{\begin{array}{rcl} x &=& 1\\ y &=& 1\\ z &=& t\\ 4x-6y-4z+3 &=& 0\end{array}\right.$

La 4ᵉ équation donne $4-6-4t+3=0$ ce qui entraîne que $t=\dfrac{1}{4}$.

La point N a donc pour coordonnées $\begin{pmatrix}1\\1\\\frac{1}{4}\end{pmatrix}$.

c. Placement du point N et construction de la section du cube par le plan (IJK) :



Partie C

On note R le projeté orthogonal du point F sur le plan (IJK). Le point R est donc l'unique point du plan (IJK) tel que la droite (FR) est orthogonale au plan (IJK).

On définit l'intérieur du cube comme l'ensemble des points M $(x\,;\,y\,;\,z)$ tels que $\begin{cases}0 < x < 1\\0 < y < 1\\0 < z < 1\end{cases}$

Le point R est le projeté orthogonal de F sur le plan (IJK) donc le vecteur $\overrightarrow{FR}$ est orthogonal au plan, donc il est colinéaire au vecteur $\overrightarrow{n}$; les coordonnées de $\overrightarrow{FR}$ sont donc de la forme $\begin{pmatrix}4k\\-6k\\-4k\end{pmatrix}$ où $k \in \mathbb{R}$.

Le point F a pour coordonnées $\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$ donc le vecteur $\overrightarrow{FR}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix}x_R-1\\y_R\\z_R-1\end{pmatrix}$.

On en déduit que R a pour coordonnées $\begin{pmatrix}1+4k\\-6k\\1-4k\end{pmatrix}$.

On pourrait calculer la valeur du réel k en utilisant le fait que R est un point du plan (IJK) donc que ses coordonnées vérifient $4x_R - 6_R - 4z_R + 3 = 0$.

Mais si on trouve $k \geqslant 0$, on aura $x_R = 1 + 4k \geqslant 1$ donc on pourra déduire que R n'est pas à l'intérieur du cube, et si on trouve $k < 0$, on aura $z_R = 1 - 4k > 1$ donc on pourra également déduire que R n'est pas à l'intérieur du cube.

On peut donc dire que R n'est pas à l'intérieur du cube.

Pour les amateurs de calcul, on trouve $k = -\dfrac{3}{68}$ et $\left(\dfrac{14}{17}\,,\,\dfrac{9}{34}\,,\,\dfrac{20}{17}\right)$ comme coordonnées de R. On voit alors que $z_R > 1$.

Exercice 4 5 points

Candidats ayant suivi la spécialité mathématique

Le but de cet exercice est d'envisager une méthode de cryptage à clé publique d'une information numérique, appelée système RSA, en l'honneur des mathématiciens Ronald Rivest, Adi Shamir et Leonard Adleman, qui ont inventé cette méthode de cryptage en 1977 et l'ont publiée en 1978.

1. Cette question envisage de calculer le reste dans la division euclidienne par 55 de certaines puissances de l'entier 8.

a.
- $8^3 = 512 = 9\times 55 + 17$ donc $8^3 \equiv 17 \mod 55$
- $8^6 = \left(8^3\right)^2 \equiv 17^2 \mod 55$; $17^2 = 289 = 5\times 55 + 14 \equiv 14 \mod 55$
  Donc $8^6 \equiv 14 \mod 55$
- $8^7 = 8^6 \times 8 \equiv 14\times 8 \mod 55$
  $14\times 8 = 112 = 2\times 55 + 2 \equiv 2 \mod 55$

On peut donc dire que $8^7 \equiv 2 \mod 55$.

$8^{21} = \left(8^7\right)^3 \equiv 2^3 \mod 55$ donc $8^{21} \equiv 8 \mod 55$

b. $8^2 = 64 = 1\times 55 + 9 \equiv 9 \mod 55$

$8^{23} = 8^{21}\times 8^2 \equiv 8\times 9 \mod 55$; $8\times 9 = 72 = 1\times 55 + 17 \equiv 17 \mod 55$. Donc $8^{23} \equiv 17 \mod 55$.

Or $0 \leqslant 17 < 55$ donc 17 est le reste de la division de 8^{23} par 55.

2. Dans cette question, on considère l'équation $(E)\quad 23x - 40y = 1$, dont les solutions sont des couples $(x\,;\,y)$ d'entiers relatifs.

a. 23 est un nombre premier et 40 n'est pas un multiple de 23 donc les nombres 23 et 40 sont premiers entre eux donc, d'après le théorème de Bézout, l'équation $23x - 40y = 1$ admet au moins un couple solution.

b. On détermine un couple solution particulière de l'équation (E) par divisions euclidiennes successives.

$40 = 1\times 23 + 17$	$23\times(-1) + 40\times 1 = 17$
$23 = 1\times 17 + 6$	$23\times 1 + 17\times(-1) = 6$
	$23\times 1 + (23\times(-1) + 40\times 1)\times(-1) = 6$
	$23\times 2 + 40\times(-1) = 6$
$17 = 2\times 6 + 5$	$17\times 1 + 6\times(-2) = 5$
	$(23\times(-1) + 40\times 1)\times 1 + (23\times 2 + 40\times(-1))\times(-2) = 5$
	$23\times(-5) + 40\times 3 = 5$
$6 = 5\times 1 + 1$	$6\times 1 + 5\times(-1) = 1$
	$(23\times 2 + 40\times(-1))\times 1 + (23\times(-5) + 40\times 3)\times(-1) = 1$
	$23\times 7 + 40\times(-4) = 1$

On arrive à $23\times 7 + 40\times(-4) = 1$ donc $23\times 7 - 40\times 4 = 1$; on peut donc dire que le couple (7,4) est solution de l'équation (E).

c.
- Si le couple (x,y) est solution de (E), on a $23\times x - 40\times y = 1$
  Le couple (7,4) est solution de (E), donc $23\times 7 - 40\times 4 = 1$
  Par soustraction membre à membre : $23(x-7) - 40\left(y-4\right) = 0$
  On déduit donc que $23(x-7) = 40\left(y-4\right)$, donc que 23 divise $40\left(y-4\right)$.
  Or 23 et 40 sont premiers entre eux donc, d'après le théorème de Gauss, 23 divise $y-4$.
  On a donc $y - 4 = 23k$ avec $k\in\mathbb{Z}$ c'est-à-dire $y = 4 + 23k$.
  $23(x-7) = 40\left(y-4\right)$ et $y - 4 = 23k$, donc $23(x-7) = 40\times 23k$ et donc $x - 7 = 40k$, c'est-à-dire $x = 7 + 40k$.
- Réciproquement, si $x = 7 + 40k$ et $y = 4 + 23k$ avec $k\in\mathbb{Z}$,
  $23x - 40y = 23(7+40k) - 40(4+23k) = 161 + 23\times 40\times k - 160 = 40\times 23\times k = 1$.
  Donc le couple $(7+40k\,, 4+23k)_{k\in\mathbb{Z}}$ est solution de (E).

L'ensemble des solutions de l'équation (E) est donc $\left\{\left(7+40k\,, 4+23k\right)\right\}_{k\in\mathbb{Z}}$.

d. $23d \equiv 1 \mod 40 \iff 23d = 1+40y$ avec $y \in \mathbb{Z} \iff 23d - 40y = 1$ avec $y \in \mathbb{Z}$ ce qui équivaut à « le couple (d, y) est solution de (E) » . Donc d s'écrit $7+40k$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

Pour satisfaire à la condition $0 \leqslant d < 40$, il faut $0 \leqslant 7+40k < 40$, ce qui n'est possible que si $k = 0$, ce qui donne $d = 7$.

Il existe donc un unique entier $d = 7$ vérifiant les conditions $0 \leqslant d < 40$ et $23d \equiv 1 \mod 40$.

3. Cryptage dans le système RSA – Une personne A choisit deux nombres premiers p et q, puis calcule les produits $N = pq$ et $n = (p-1)(q-1)$. Elle choisit également un entier naturel c premier avec n.

La personne A publie le couple $(N\,;\,c)$, qui est une clé publique permettant à quiconque de lui envoyer un nombre crypté.

Les messages sont numérisés et transformés en une suite d'entiers compris entre 0 et $N-1$.

Pour crypter un entier a de cette suite, on procède ainsi : on calcule le reste b dans la division euclidienne par N du nombre a^c, et le nombre crypté est l'entier b.

On va l'envisager ici avec des nombres simples : $p = 5$ et $q = 11$. La personne A choisit $c = 23$.

a. $N = pq = 5 \times 11 = 55$ et $n = \left(p-1\right)\left(q-1\right) = 4 \times 10 = 40$

On a déjà vu que 23 et 40 étaient premiers entre eux, donc l'entier naturel $c = 23$ vérifie la condition voulue.

b. Un émetteur souhaite envoyer à la personne A le nombre $a = 8$.

Le nombre crypté b est le reste dans la division par N du nombre a^c, donc le reste dans la division par 55 du nombre 8^{23}.

D'après la question **1.b.**, le nombre crypté b vaut 17.

4. Décryptage dans le système RSA – La personne A calcule dans un premier temps l'unique entier naturel d vérifiant les conditions $0 \leqslant d < n$ et $cd \equiv 1 \mod n$.

Elle garde secret ce nombre d qui lui permet, et à elle seule, de décrypter les nombres qui lui ont été envoyés cryptés avec sa clé publique.

Pour décrypter un nombre crypté b, la personne A calcule le reste a dans la division euclidienne par N du nombre b^d, et le nombre en clair – c'est-à-dire le nombre avant cryptage – est le nombre a.

On admet l'existence et l'unicité de l'entier d, et le fait que le décryptage fonctionne.

Les nombres choisis par A sont encore $p = 5$, $q = 11$ et $c = 23$.

a. Le nombre d est l'unique entier tel que $0 \leqslant d < n$ et $cd \equiv 1 \mod n$, c'est-à-dire $0 \leqslant d < 40$ et $23d \equiv 1 \mod 40$; d'après la question **2.d.** on peut dire que $d = 7$.

b. Le nombre crypté étant $b = 17$, le nombre en clair est le nombre a, reste de la division de b^d par N, c'est-à-dire le reste de la division de 17^7 par 55.

- $17^3 = 4\,913 = 89 \times 55 + 18$ donc $17^3 \equiv 18 \mod 55$
- $17^6 = \left(17^3\right)^2 \equiv 18^2 \mod 55$; $18^2 = 324 = 4 \times 55 + 49$ donc $18^2 \equiv 49 \mod 55$
  On en déduit que $17^6 \equiv 49 \mod 55$.
- $17^7 = 17^6 \times 17 \equiv 49 \times 17 \mod 55$; $49 \times 17 = 833 = 15 \times 55 + 8$ donc $49 \times 17 \equiv 8 \mod 55$
  On en déduit que $17^7 \equiv 8 \mod 55$ et comme $0 \leqslant 8 < 55$, on peut dire que 8 est le reste de la division de 17^7 par 55.

Le nombre qui se crypte en 17 est donc 8.