Exercice 1 **4 points**

Commun à tous les candidats

1.

Solution : Réponse **d)**

Explication non demandée mais donnée à titre indicatif

On répète $n = 80$ fois de manière indépendante une expérience n'ayant que deux issues (la personne choisie pratique le surf ou non) dont la probabilité de succès (la personne pratique le surf) est $p = 0{,}25$.

Soit X la variable aléatoire comptant le nombre de succès.

On a alors $p(X = 20) = \binom{80}{20} \times 0{,}25^{20} \times 0{,}75^{60} \approx 0{,}103$.

2.

Solution : Réponse **d)**

Explication non demandée mais donnée à titre indicatif

$p(X \geqslant 100) = 1 - P(X \leqslant 100)$

$\mu = 150$ donc $100 = \mu - 50$ et $200 = \mu + 50$.

$P(X \leqslant 100) = P(X \leqslant \mu - 50) = P(X \geqslant \mu + 50) = P(X \geqslant 200)$ par symétrie de la courbe de la fonction densité par rapport à la droite d'équation $x = \mu$.

Donc $p(X \geqslant 100) = 1 - P(X \geqslant 200) = 0{,}975$.

3.

Solution : Réponse **c)**

Explication non demandée mais donnée à titre indicatif

Soit λ le paramètre de la loi exponentielle associée à T alors on a $E(T) = \dfrac{1}{\lambda}$ on a donc $\dfrac{1}{\lambda} = 5$ d'où $\lambda = 0{,}2$.

$P(T \geqslant 5) = 1 - P(0 \leqslant T \leqslant 5) = 1 - \displaystyle\int_0^5 0{,}2\mathrm{e}^{-0{,}2t}\,dt = 1 - \left[-\mathrm{e}^{-0{,}2t}\right]_0^5 = 1 - \left(-\mathrm{e}^{-1} + 1\right) = \mathrm{e}^{-1}$.

4.

Solution : Réponse **b)**

Explication non demandée mais donnée à titre indicatif

L'intervalle de confiance sur un échantillon de taille n bâti avec la fréquence f de clients satisfaits et $\left[f - \dfrac{1}{\sqrt{n}}\,;f + \dfrac{1}{\sqrt{n}}\right]$. Son amplitude est donc $\dfrac{2}{\sqrt{n}}$.

$\dfrac{2}{\sqrt{n}} = 0{,}04 \iff \sqrt{n} = 50 \iff n = 2\,500$.

Exercice 2 **6 points**

Commun à tous les candidats

Partie A

1.

Solution : $u_2 = 2 \times u_1 - 1 = -1$

$u_3 = 3u_2 - 1 = -4$

$u_4 = 4u_3 - 1 = -17$

2.

Solution :

Pour N allant de 1 à 12
$U \leftarrow (N+1)\times U-1$
Fin Pour

3.

Solution :
Il semblerait que si $u_1 = 0{,}7$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$ et si $u_1 = 0{,}8$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$

Partie B

1.

Solution : F est dérivable sur $[0\,;\,1]$ comme composée et produit de fonctions dérivables sur $[0\,;\,1]$.

$F = u\mathrm{e}^v \implies F' = u'\mathrm{e}^v + uv'\mathrm{e}^v = (u'+uv')\mathrm{e}^v$ avec $\begin{cases} u(x) = -1-x \\ v(x) = 1-x \end{cases} \implies \begin{cases} u'(x) = -1 \\ v'(x) = -1 \end{cases}$

donc $\forall x \in [0\,;\,1]$, $f'(x) = (-1-(-1-x))\mathrm{e}^{1-x} = x\mathrm{e}^{1-x} = f(x)$.
Donc F est bien une primitive de f sur $[0\,;\,1]$.

2.

Solution :
$I_1 = \displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = [F(x)]_0^1 = F(1)-F(0) = -2\mathrm{e}^0 - \left(-\mathrm{e}^1\right) = \mathrm{e}-2.$

3.

Solution :
$I_2 = 2I_1 - 1 = 2(\mathrm{e}-1)-1 = 2\mathrm{e}-3.$

4. a.

Solution :
$0 \leqslant x \leqslant 1 \iff -1 \leqslant -x \leqslant 0 \iff 0 \leqslant 1-x \leqslant 1$
En appliquant la fonction exponentielle sur $[0\,;\,1]$ où elle est croissante on obtient alors
$\mathrm{e}^0 \leqslant \mathrm{e}^{1-x} \leqslant \mathrm{e}^1$ puis en multipliant membre à membre par x^n qui est positif sur $[0\,;\,1]$ on obtient finalement :
$\forall x \in [0\,;\,1]$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant x^n\mathrm{e}^{1-x} \leqslant x^n\mathrm{e}$.

b.

Solution :
$\displaystyle\int_0^1 x^n\mathrm{e}\,\mathrm{d}x = \mathrm{e}\int_0^1 x^n\,dx = \mathrm{e}\left[\frac{1}{n+1}x^{n+1}\right]_0^1 = \mathrm{e}\left(\frac{1}{n+1}-0\right) = \frac{\mathrm{e}}{n+1}.$

c.

Solution :
On sait que si $x \in [0\,;\,1]$ alors $0 \leqslant x^n\mathrm{e}^{1-x} \leqslant x^n\mathrm{e}$ et comme l'intégrale conserve l'ordre, on obtient :
$0 \leqslant \displaystyle\int_0^1 x^n\mathrm{e}^{1-x}\,\mathrm{d}x \leqslant \int_0^1 x^n\mathrm{e}\,\mathrm{d}x.$
On a donc bien $0 \leqslant I_n \leqslant \dfrac{\mathrm{e}}{n+1}$.

d.

Solution :
$\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\mathrm{e}}{n+1} = 0$ donc d'après le théorème des gendarmes, $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n = 0$.

Partie C

1.

Solution :
initialisation : $1! = 1$ donc $1!(u_1 - \mathrm{e} + 2) + I_1 = u_1 - \mathrm{e} + 2 + \mathrm{e} - 2 = u_1$ donc l'égalité est vérifiée au rang $n = 1$
hérédité : Soit n un entier naturel non nul tel que l'égalité $u_n = n!(u_1 - \mathrm{e} + 2) + I_n$ soit vérifiée. On a alors :

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= (n+1)u_n - 1 \quad \text{d'après l'énoncé} \\ &= (n+1)\left(n!(u_1 - \mathrm{e} + 2) + I_n\right) - 1 \quad \text{d'après l'hypothèse de récurrence} \\ &= (n+1)!(u_1 - \mathrm{e} + 2) + (n+1)I_n - 1 \\ &= (n+1)!(u_1 - \mathrm{e} + 2) + I_{n+1} \quad \text{d'après la question } \textbf{3.} \text{ de la } \textbf{partie B.} \end{aligned}$$

l'égalité est donc héréditaire à partir du rang $n = 1$
or l'égalité est vérifiée au rang $n = 1$ donc par le principe de récurrence $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = n!(u_1 - \mathrm{e} + 2) + I_n$.

2. a.

Solution : On sait que $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n = 0$.
Si $u_1 = 0{,}7$ alors $u_1 - \mathrm{e} + 2 \approx -0{,}02 < 0$ donc par opération sur les limites $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$

b.

Solution :
Si $u_1 = 0{,}8$ alors $u_1 - \mathrm{e} + 2 \approx 0{,}08 > 0$ donc par opération sur les limites $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$

EXERCICE 3 — **5 points**

Commun à tous les candidats

Partie A : étude d'exemples

1. a.

Solution : $z = \mathrm{i}$ alors $z^2 = -1$ et $\dfrac{1}{z} = \dfrac{1}{\mathrm{i}} = -\mathrm{i}$.

b.

Solution : $N_1(-1)$ et $P_1(-\mathrm{i})$.
Voir à la fin de l'exercice.

2.

Solution :
$\Delta = b^2 - 4ac = -3 = \left(\mathrm{i}\sqrt{3}\right)^2 < 0$ on en déduit que l'équation admet deux solutions complexes conjuguées

$$\begin{cases} z_1 = \dfrac{-b - \mathrm{i}\sqrt{-\Delta}}{2a} = -\dfrac{1}{2} - \mathrm{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ \\ z_2 = \overline{z_1} = -\dfrac{1}{2} + \mathrm{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

3. a.

Solution : $z = -\dfrac{1}{2} + \mathrm{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{3}}$

$z^2 = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{4\pi}{3}} = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{2\pi}{3}} = \overline{z}$

$\dfrac{1}{z} = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{2\pi}{3}} = z^2 = \overline{z}$

b.

Solution : N_2 et P_2 sont confondus donc A, N_2 et P_2 sont évidemment alignés.
Voir à la fin de l'exercice.

Partie B

1.

Solution :

$$\begin{aligned} \forall z \in \mathbb{C}^*,\ \left(z^2 + z + 1\right)\left(1 - \frac{1}{z}\right) &= z^2 + z + 1 - z - 1 - \frac{1}{z} \\ &= z^2 - \frac{1}{z} \end{aligned}$$

2.

Solution :
A, N et P définis ci-dessus sont alignés si et seulement si il existe un réel k tel que $z_{\overrightarrow{PN}} = kz_{\overrightarrow{PA}}$.

Or $z_{\overrightarrow{PN}} = z^2 - \dfrac{1}{z}$ et $z_{\overrightarrow{PA}} = 1 - \dfrac{1}{z}$.

Donc les trois points sont alignés si et seulement si il existe un réel k tel que $z^2 - \dfrac{1}{z} = k\left(1 - \dfrac{1}{z}\right)$

On vient de prouver que $\forall z \in \mathbb{C}^*,\ z^2 - \dfrac{1}{z} = \left(z^2 + z + 1\right)\left(1 - \dfrac{1}{z}\right)$.

Finalement A, N et P définis ci-dessus sont alignés si et seulement si $z^2 + z + 1$ est réel.

3.

Solution :

$$\begin{aligned} z^2 + z + 1 &= \left(x + \mathrm{i}y\right)^2 + x + \mathrm{i}y + 1 \\ &= x^2 + 2\mathrm{i}xy - y^2 + x + \mathrm{i}y + 1 \\ &= x^2 - y^2 + x + 1 + \mathrm{i}(2xy + y) \end{aligned}$$

4. a.

Solution :
A, N et P soient alignés si et seulement si z^2+z+1 est réel autrement dit si et seulement si $2xy+y=0$

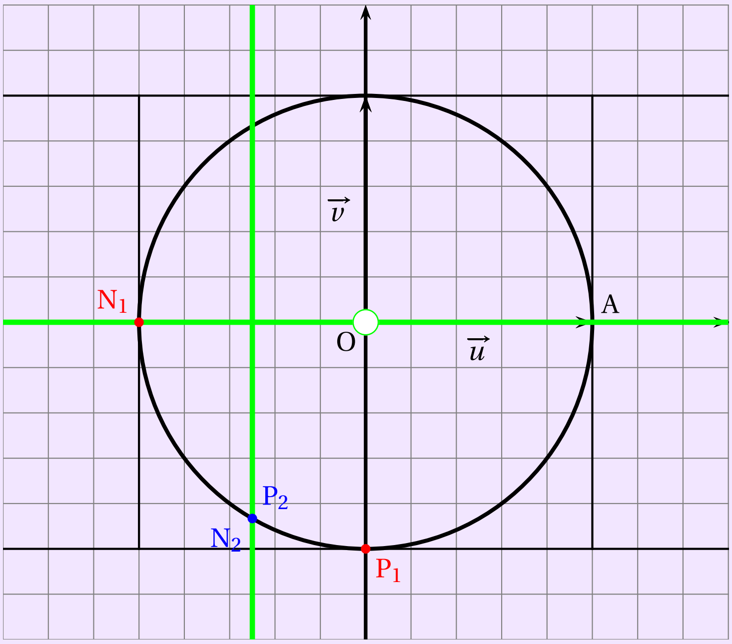
$$2xy+y=0 \iff y(2x+1)=0 \iff \begin{cases} y=0 \\ \text{ou} \\ x=-\dfrac{1}{2} \end{cases}$$

L'ensemble est donc la réunion de la droite d'équation $x=-\dfrac{1}{2}$ et de l'axe des réels privé de O.

Cet ensemble est représenté en vert sur le graphique.

b.

Solution :



Exercice 4 **5 points**

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

1. a.

Solution : P(2 ; 0 ; 0) , Q(0 ; 0 ; 2) et Ω(3 ; 3 ; 3)

b.

Solution : R(0 ; 4 ; 6) donc $\overrightarrow{PR}\begin{pmatrix}-2\\4\\6\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{QR}\begin{pmatrix}0\\4\\4\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{n}\begin{pmatrix}1\\b\\c\end{pmatrix}$ est un vecteur normal au plan (PQR) si et seulement si il est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires de ce plan.

$$\begin{cases}\overrightarrow{n}\cdot\overrightarrow{PR}=0\\ \overrightarrow{n}\cdot\overrightarrow{QR}=0\end{cases} \iff \begin{cases}-2+4b+6c=0\\ 4b+4c=0\end{cases} \iff \begin{cases}2b=-2\\ c=-b\end{cases} \iff \begin{cases}b=-1\\ c=1\end{cases}$$

Finalement $\overrightarrow{n}\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$ est un vecteur normal au plan (PQR)

c.

Solution :
$\vec{n}\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$ est un vecteur normal au plan (PQR) donc (PQR) : $x-y+z+d=0$.
Or P$(2;0;0) \in$ (PQR) donc $x_P - y_P + z_P + d = 0$.
Finalement (PQR) : $x-y+z-2=0$.

2. a.

Solution : Δ est perpendiculaire au plan (PQR) donc $\vec{n}$ est directeur de Δ, de plus $\Omega(3;3;3) \in \Delta$.
On en déduit : Δ : $\begin{cases} x=3+t \\ y=3-t \\ z=3+t \end{cases} \quad (t\in\mathbb{R})$.

b.

Solution : Si on pose $t=-\dfrac{1}{3}$ dans la représentation précédente on obtient les coordonnées de I donc I $\in\ \Delta$.
De plus $x_I - y_I + z_I - 2 = \dfrac{8}{3} - \dfrac{10}{3} + \dfrac{8}{3} - 2 = 0$ donc I $\in$ (PQR).
Finalement Δ coupe le plan (PQR) au point I $\left(\dfrac{8}{3}\,;\,\dfrac{10}{3}\,;\,\dfrac{8}{3}\right)$.

c.

Solution :
$\Omega\text{I}=\sqrt{(x_I-x_\Omega)^2+\left(y_I-y_\Omega\right)^2+(z_I-z_\Omega)^2}=\sqrt{\dfrac{1}{3}}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

3. a.

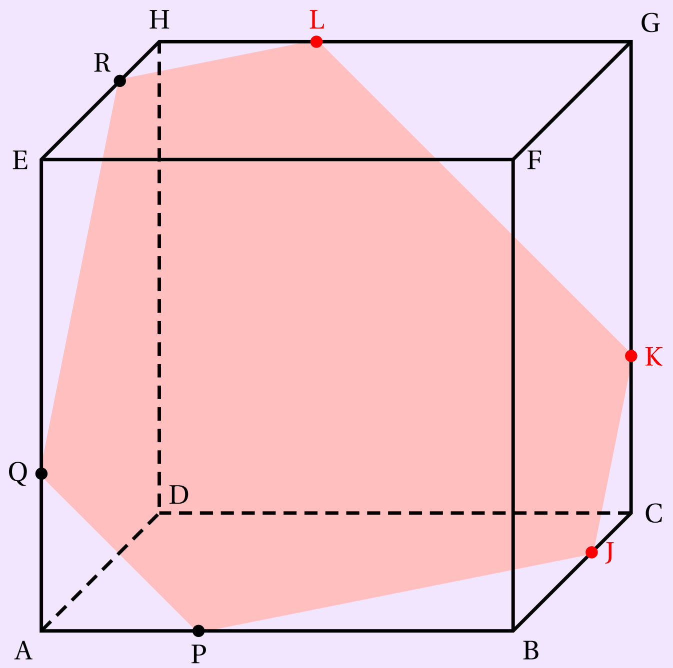
Solution : $x_J - y_J + z_J - 2 = 6-4-2 = 0$ donc J $\in$ (PQR).

b.

Solution :
$\overrightarrow{\text{JK}}\,(0\,;\,2\,;\,2)$ or $\overrightarrow{\text{QR}}\,(0\,;\,4\,;\,4)$ donc ces deux vecteurs sont colinéaires.
On en déduit que (JK) et (QR) sont parallèles.

c.

Solution : J et K sont respectivement sur les arêtes [BC] et [CG] du cube
On place J et K aisément en remarquant que $\overrightarrow{BJ} = \dfrac{2}{3}\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{CK} = \dfrac{1}{3}\overrightarrow{CG}$
J $\in$ (PQR) et (JK) est parallèle à (QR) donc (JK) $\subset$ (PQR).
(PQR) coupe la plan (ABE) suivant la droite (QP)
donc (PQR) coupe le plan (CDG) suivant une parallèle à (QP) passant par K.
Soit L le point d'intersection entre cette droite et l'arête [GH].
La section du cube par le plan (PQR) est l'hexagone JKLRQP



Exercice 4 **5 points**

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Partie A :

1.

Solution : $(x\ ;\ y) = (17\ ;\ 23)$ est un couple d'entiers premiers solution de $40 = x + y$.

2.

Solution : Le couple d'entiers relatifs $(x\ ;\ y) = (40\ ;\ -40)$ est une solution évidente de $(E) : 20x + 19y = 40$.

Soit $(x\ ;\ y)$ un couple de solution de (E) alors on a : $20x + 19y = 40$.

Or on a $20 \times 40 + 19 \times (-40) = 40$.

Par soustraction membre à membre de ces équations on obtient $20(x - 40) + 19(y + 40) = 0$

$20(x - 40) + 19(y + 40) = 0 \iff 20(40 - x) = 19(y + 40)$

On en déduit que 20 divise $19(y+40)$ or 20 et 19 sont premiers entre eux donc d'après le théorème de Gauss, 20 divise $(y + 40)$.

Il existe donc un entier relatif k tel que $y + 40 = 20k$.

Alors $19(y + 40) = 19 \times 20k$ donc $20(40 - x) = 19 \times 20k$ soit $40 - x = 19k$.

Il existe donc un entier relatif k tel que $\begin{cases} 40 - x = 19k \\ y + 40 = 20k \end{cases}$

Finalement les couples solutions de (E) sont de la forme $(40 - 19k\ ;\ -40 + 20k)$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

3. **a.**

Solution : $40 = 2^3 \times 5$

b.

Solution :

Supposons que $x - y$ est pair alors il existe un entier relatif k tel que $x - y = 2k$.

$x - y = 2k \iff x = y + 2k \iff x + y = 2y + 2k = 2(y + k)$ or $(y + k) \in \mathbb{Z}$

Donc si $x - y$ est pair alors $x + y$ est pair aussi.

Supposons que $x - y$ est impair alors il existe un entier relatif k tel que $x - y = 2k + 1$.
$x - y = 2k+1 \iff x = y + 2k + 1 \iff x + y = 2y + 2k + 1 = 2(y+k) + 1$ or $(y+k) \in \mathbb{Z}$
Donc si $x - y$ est impair alors $x + y$ est impair aussi.

Finalement, $x - y$ et $x + y$ ont la même parité.

c.

Solution : $x^2 - y^2 = 40 \iff (x-y)(x+y) = 40$
D'après ce qui précède on sait que $(x - y)$ et $(x + y)$ ont la même parité.
40 ne peut pas être le produit de deux nombres impairs, on cherche donc à écrire 40 comme produit de deux entiers pairs.
D'après la question **3. a.** on en déduit qu'il n'y a que deux solutions : $40 = 2 \times 20 = 4 \times 10$.
x et y étant des entiers naturels, on a $x + y \geqslant x - y \geqslant 0$.
On a donc deux solutions possibles :
$\begin{cases} x+y=20 \\ x-y=2 \end{cases} \iff \begin{cases} x=11 \\ y=9 \end{cases}$ et $\begin{cases} x+y=10 \\ x-y=4 \end{cases} \iff \begin{cases} x=7 \\ y=3 \end{cases}$
Finalement les couples d'entiers naturels $(x\,;\,y)$ solutions de $x^2 - y^2 = 40$ sont $(7\,;\,3)$ et $(11\,;\,9)$.

Partie B : « sommes » de cubes

1. a.

Solution : $40 = 13 + 27$ or $27 = 3^3$ on en déduit une décomposition de 40 en « somme » de 5 cubes :
$40 = 1^3 + 3^3 + 7^3 + 10^3 - 11^3$

b.

Solution : En posant $n = 8$ dans l'égalité on obtient :
$48 = 9^3 + 7^3 - 8^3 - 8^3$
Or $40 = 48 - 8 = 48 - 2^3$
On en déduit une décomposition de 40 en « somme » de 5 cubes :
$40 = -2^3 + 7^3 - 8^3 - 8^3 + 9^3$

2. a.

Solution :

Reste de la division euclidienne de n par 9	0	1	2	3	4	5	6	7	8
Reste de la division euclidienne de n^3 par 9	0	1	8	0	1	8	0	1	8

b.

Solution :
Supposons que 40 peut être décomposé en « somme »de 3 cubes. Donc, supposons qu'il existe trois entiers relatifs a,$b$et c tels que $40 = a^3 + b^3 + c^3$
On sait que chacun de ces cubes est congru modulo 9 soit à 0, soit à 1, soit à -1.
Alors $\left(a^3 + b^3 + c^3\right) \equiv d$ [9] avec $d \in \{-3\,;\,-2\,;\,-1\,;\,0\,;\,1\,;\,2\,;\,3\}$
Or on sait que $40 \equiv 4$ [9] ce qui rend absurde la supposition.
Finalement, 40 ne peut pas être décomposé en « somme » de 3 cubes.