Durée : 4 heures

Corrigé du baccalauréat S Métropole–La Réunion 21 juin 2019

Exercice I — 6 points

Commun à tous les candidats

Partie A

On considère la fonction f définie sur l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels par :

$$f(x) = \frac{7}{2} - \frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^{x} + \mathrm{e}^{-x}\right)$$

1. **a.** $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{e}^{x} = +\infty$; $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{e}^{-x} = 0$ car $\mathrm{e}^{-x} = \dfrac{1}{\mathrm{e}^{x}}$ donc par somme et produit, $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty}$.

   b. Pour tout x, $f'(x) = -\dfrac{1}{2}\left(\mathrm{e}^{x} - \mathrm{e}^{-x}\right)$.

   De même $f''(x) = -\dfrac{1}{2}\left(\mathrm{e}^{x} - \left[-\mathrm{e}^{-x}\right]\right) = -\dfrac{1}{2}\left(\mathrm{e}^{x} + \mathrm{e}^{-x}\right)$.

   Comme $\mathrm{e}^{x} + \mathrm{e}^{-x} > 0$, quel que soit x, comme somme de deux termes supérieurs à zéro, il en résulte que $f''(x) < 0$ en particulier sur $[0\,;\,+\infty[$.

   La fonction f' est donc décroissante à partir de $f'(0) = 0$ et par conséquent $f'(x) < 0$ sur $]0\,;\,+\infty[$.

   Conclusion : la dérivée f' ne s'annulant que pour $x = 0$ et étant négative pour $x > 0$, la fonction f est strictement décroissante sur $]0\,;\,+\infty[$.

   c. f est continue : $f(0) = \dfrac{7}{2} - \dfrac{1}{2}(1+1) = \dfrac{7}{2} - 1 = \dfrac{5}{2} > 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$. Il existe donc un réel $x > 0$ tel que $f(x) < 0$; par exemple $f(2) \approx -0,26$.

   Sur l'intervalle $[0\,;\,2]$ la fonction est continue car dérivable : comme elle est strictement décroissante sur cet intervalle (d'après la question précédente) d'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 0$ a une solution unique $\alpha \in [0\,;\,2]$.

2. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(-x) = \dfrac{7}{2} - \dfrac{1}{2}\left(\mathrm{e}^{-x} + \mathrm{e}^{x}\right) = \dfrac{7}{2} - \dfrac{1}{2}\left(\mathrm{e}^{x} + \mathrm{e}^{-x}\right) = f(x)$.

   Donc f est une fonction paire.

   On a vu qu'il existe $\alpha \in [0\,;\,+\infty[$ unique tel que $f(\alpha) = 0$.

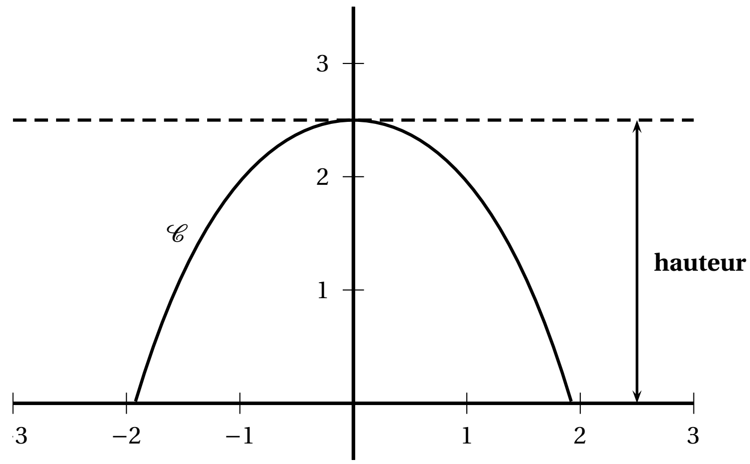
   Or $f(-\alpha) = f(\alpha) = 0$. Donc $-\alpha \in [-\infty\,;\,0]$ vérifie $f(-\alpha) = 0$.

   Conclusion : l'équation dans $\mathbb{R}$, $f(x) = 0$ a deux solutions opposées α et $-\alpha$.

Partie B

Les **serres en forme de tunnel** sont fréquemment utilisées pour la culture des plantes fragiles ; elles limitent les effets des intempéries ou des variations de température.
Elles sont construites à partir de plusieurs arceaux métalliques identiques qui sont ancrés au sol et supportent une bâche en plastique.

Le plan est rapporté à un repère orthonormé d'unité 1 mètre. La fonction f et le réel α sont définis dans la **partie A**. Dans la suite de l'exercice, on modélise un arceau de serre par la courbe $\mathscr{C}$ de la fonction f sur l'intervalle $[-\alpha\,;\,+\alpha]$.
On a représenté ci-dessous la courbe $\mathscr{C}$ sur l'intervalle $[-\alpha\,;\,+\alpha]$.



On admettra que la courbe $\mathscr{C}$ admet l'axe des ordonnées pour axe de symétrie.

1. La hauteur d'un arceau est $f(0) = \boxed{\dfrac{5}{2}}$.

2. **a.** Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $1 + \left[f'(x)\right]^2 = 1 + \left[-\dfrac{1}{2}\left(\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}\right)\right]^2 = 1 + \dfrac{(\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x})^2}{4} = 1 + \dfrac{\mathrm{e}^{2x} - 2 + \mathrm{e}^{-2x}}{4} = \dfrac{4 + \mathrm{e}^{2x} - 2 + \mathrm{e}^{-2x}}{4} = \dfrac{\mathrm{e}^{2x} + 2 + \mathrm{e}^{-2x}}{4} = \dfrac{1}{4}\left(\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}\right)^2 = \left[\dfrac{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}{2}\right]^2$.

b. Alors : $I = \displaystyle\int_0^{\alpha} \sqrt{1 + \left[f'(x)\right]^2} = \int_0^{\alpha} \left(\dfrac{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}{2}\right) \mathrm{d}x = \dfrac{1}{2}\left(G(\alpha) - G(0)\right)$ où G est une primitive de $x \mapsto \mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}$.

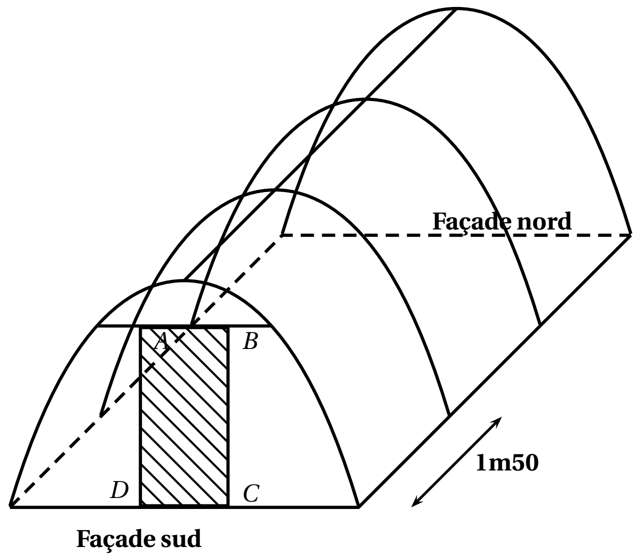
On a : $G(x) = \mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}$.

Alors : $I = \dfrac{1}{2}\left[G(\alpha) - G(0)\right] = \dfrac{1}{2}\left(\mathrm{e}^{\alpha} - \mathrm{e}^{-\alpha}\right)$

Puisque la fonction f est paire, la courbe $\mathscr{C}_f)$ est symétrique par rapport à l'axe $(\mathrm{O}y)$, $\boxed{L = 2I = \mathrm{e}^{\alpha} - \mathrm{e}^{-\alpha}}$

Partie C

On souhaite construire une serre de jardin en forme de tunnel.
On fixe au sol quatre arceaux métalliques, dont la forme est celle décrite dans la partie précédente, espacés de 1,5 mètre, comme indiqué sur le schéma ci-dessous.
Sur la façade sud, on prévoit une ouverture modélisée sur le schéma par le rectangle $ABCD$ de largeur 1 mètre et de longueur 2 mètres.



On souhaite connaître la quantité, exprimée en m^2, de bâche plastique nécessaire pour réaliser cette serre.
Cette bâche est constituée de trois parties, l'une recouvrant la façade nord, l'autre la façade sud (sauf l'ouverture), la troisième partie de forme rectangulaire recouvrant le toit de la serre.

1. Les façades Nord et Sud ont chacune une aire égale à $\displaystyle\int_{-\alpha}^{\alpha} f(x)\,\mathrm{d}x = 2\int_0^{\alpha} f(x)\,\mathrm{d}x$.
   L'aire de l'ouverture vaut 2, donc la quantité de bâche nécessaire pour recouvrir les façades sud et nord est donnée, en m^2, par :
   $$\mathscr{A} = 4\int_0^{\alpha} f(x)\,\mathrm{d}x - 2$$
2. $f(x) = \dfrac{7}{2} - \dfrac{1}{2}\left(\mathrm{e}^{x} + \mathrm{e}^{-x}\right)$.
   Une primitive de f est définie par $F(x) = \dfrac{7}{2}x - \dfrac{1}{2}\left(\mathrm{e}^{x} - \mathrm{e}^{-x}\right)$.
   Alors : $\mathscr{A} = 4\displaystyle\int_0^{\alpha} f(x)\,\mathrm{d}x - 2 = 4[F(\alpha) - F(0)] - 2$.
   $F(\alpha) = \dfrac{7}{2}\alpha - \dfrac{1}{2}\left(\mathrm{e}^{\alpha} - \mathrm{e}^{-\alpha}\right)$.
   $F(0) = 0$
   $\boxed{\mathscr{A} = 14\alpha - 2\left(\mathrm{e}^{\alpha} - \mathrm{e}^{-\alpha}\right) - 2}$.

   L'aire de la bâche latérale est celle d'un rectangle, de longueur $3 \times 1,50 = 4,5$ m et de largeur L, avec $L = 2I$ (voir la partie B).
   Cette aire est donc égale à $4,5L = 4,5\left(\mathrm{e}^{\alpha} - \mathrm{e}^{-\alpha}\right)$.
   L'aire totale de la bâche plastique nécessaire est :
   $14\alpha - 2\left(\mathrm{e}^{\alpha} - \mathrm{e}^{-\alpha}\right) - 2 + 4,5\left(\mathrm{e}^{\alpha} - \mathrm{e}^{-\alpha}\right) = 14\alpha + 2,5\left(\mathrm{e}^{\alpha} - \mathrm{e}^{-\alpha}\right) - 2 \approx \boxed{41,57}$ m^2.

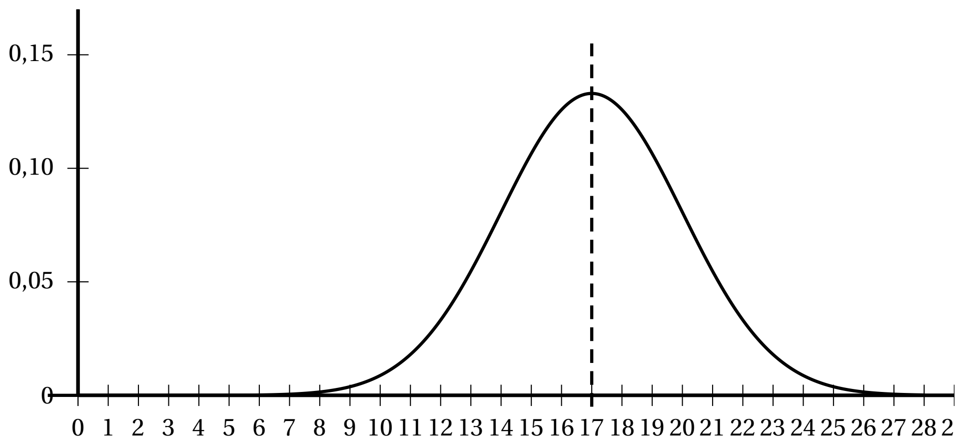
Exercice II 5 points

Commun à tous les candidats

Une plateforme informatique propose deux types de jeux vidéo : un jeu de type A et un jeu de type B.

Partie A

Les durées des parties de type A et de type B, exprimées en minutes, peuvent être modélisées respectivement par deux variables aléatoires X_A et X_B.
La variable aléatoire X_A suit la loi uniforme sur l'intervalle $[9 ; 25]$
La variable aléatoire X_B suit la loi normale de moyenne μ et d'écart type 3. La représentation graphique de la fonction de densité de cette loi normale et son axe de symétrie sont donnés ci-dessous.



1. **a.** La durée moyenne d'une partie de type A est $E(X_A) = \dfrac{9+25}{2} = \boxed{17}$.

   b. La courbe représentative de la densité correspondant à la loi normale a pour axe de symétrie la droite d'équation $x = 17$, donc la durée moyenne d'une partie de type B est $\mu = 17$ minutes.

2. • Avec le jeu de type A, on a : $P(X_A \leqslant 20) = \dfrac{20-9}{25-9} = \dfrac{11}{16} = 0{,}6875$.

   • Avec le jeu de type B, on a : $P(X_B \leqslant 20) = P\left(X_B \leqslant \mu+\sigma\right) = P\left(X_B \leqslant \mu\right) + P\left(\mu \leqslant X_B \leqslant \mu+\sigma\right) = \dfrac{1}{2} + \dfrac{0{,}68}{2} \approx 0{,}84$ au centième près.

   Comme on choisit de manière équiprobable le jeu, la probabilité cherchée est
   $\dfrac{P(X_A \leqslant 20) + P(X_B \leqslant 20)}{2} \approx \boxed{0{,}76}$ au centième près.

Partie B

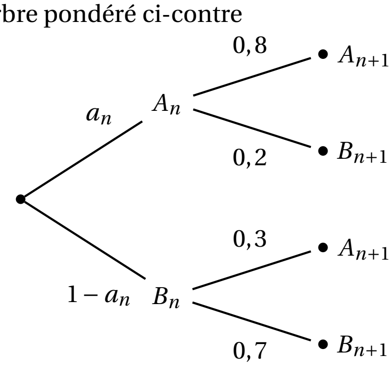
On admet que, dès que le joueur achève une partie, la plateforme lui propose une nouvelle partie selon le modèle suivant :

— si le joueur achève une partie de type A, la plateforme lui propose de jouer à nouveau une partie de type A avec une probabilité de $0{,}8$;

— si le joueur achève une partie de type B, la plateforme lui propose de jouer à nouveau une partie de type B avec une probabilité de $0{,}7$.

Pour une entier naturel n supérieur ou égal à 1, on note A_n et B_n les évènements :
A_n : « la n-ième partie est une partie de type A. »
B_n : « la n-ième partie est une partie de type B. »
Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, on note a_n la probabilité de l'évènement A_n.

1. **a.** Recopier et compléter l'arbre pondéré ci-contre



b. D'après la formule des probabilités totales, on a :
$P(A_{n+1}) = P_{A_n}(A_n \cap A_{n+1}) + P_{B_n}(B_n \cap A_{n+1}) = 0,8a_n + 0,3(1-a_n) = 0,5a_n + 0,3$ donc

$$\boxed{a_{n+1} = 0,5a_n + 0,3}$$

Dans la suite de l'exercice, on note a la probabilité que le joueur joue au jeu A lors de sa première partie, où a est un nombre réel appartenant à l'intervalle $[0\,;\,1]$. La suite (a_n) est donc définie par : $a_1 = a$, et pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, $a_{n+1} = 0,5a_n + 0,3$.

2. *Étude d'un cas particulier.* Dans cette question, on suppose que $a = 0,5$.

a. Montrons par récurrence, que pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, on a : $0 \leqslant a_n \leqslant 0,6$:

- Initialisation : $a_1 = a = 0,5$ donc $0 \leqslant a_1 \leqslant 0,6$
- Hérédité : on suppose $0 \leqslant a_n \leqslant 0,6$ pour une valeur quelconque de $n \geqslant 1$.
  Alors : $0 \leqslant 0,5 \times a_n \leqslant 0,5 \times 0,6$ donc $0 \leqslant 0,5a_n \leqslant 0,3$ d'où, en ajoutant 0,3 :
  $0,3 \leqslant 0,3 + 0,5a_n \leqslant 0,6$ et par conséquent : $0 \leqslant a_{n+1} \leqslant 0,6$.
  La propriété est est vraie au rang $n+1$.

La propriété est vraie au rang 1 et, si elle est vraie à un rang n quelconque elle est vraie au rang suivant $n+1$: d'après le principe de récurrence, elle est vraie pour tout $n \geqslant 1$.

b. Pour tout $n \geqslant 1$, $a_{n+1} - a_n = 0,5a_n + 0,3 - a_n = -0,5a_n + 0,3$.
Or, d'après la question précédente, on a :
$0 \leqslant a_n \leqslant 0,6 \Rightarrow 0 \leqslant 0,5a_n \leqslant 0,3 \Rightarrow -0,3 \leqslant -0,5a_n \leqslant 0 \Rightarrow 0 \leqslant -0,5a_n + 0,3 \leqslant 0,3$ donc $a_{n+1} - a_n \geqslant 0$.
La suite est donc croissante.

c. La suite est croissante et majorée par 0,6, donc la suite est convergente vers une limite $\ell \leqslant 0,6$.

$\lim\limits_{n \to +\infty} a_n = \ell$; $\lim\limits_{n \to +\infty} (0,5a_n + 0,3) = 0,5\ell + 0,3$.
Par unicité de la limite, on a : $0,5\ell + 0,3 = \ell$ donc $0,3 = 0,5\ell$ qui donne $\boxed{\ell = 0,6}$.
La suite (a_n) converge vers 0,6.

3. *Étude du cas général.* Dans cette question, le réel a appartient à l'intervalle $[0\,;\,1]$.
On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel $n \geqslant 1$ par $u_n = a_n - 0,6$.

a. Pour tout n, $u_{n+1} = a_{n+1} - 0,6 = 0,5a_n + 0,3 - 0,6 = 0,5a_n - 0,3 = 0,5(a_n - 0,6) = 0,5u_n$ donc $\boxed{u_{n+1} = 0,5u_n}$.
La suite (u_n) est donc géométrique de raison $q = 0,5$ et de premier terme $u_1 = a_1 - 0,6 = a - 0,6$.

b. Puisque (u_n) est géométrique, $u_n = u_1 q^{n-1} = (a - 0,6) \times 0,5^{n-1}$ $(n \geqslant 1)$.
Comme $u_n = a_n - 0,6$, on a : $a_n = u_n + 0,6 = \boxed{a_n = (a - 0,6) \times 0,5^{n-1} + 0,6}$.

c. $-1 < 0,5 < 1$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} 0,5^{n-1} = 0$ d'où, par produit et par somme, $\boxed{\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0,6}$.
Cette limite ne dépend pas de la valeur de a.

d. Sur le long terme, la probabilité que le joueur fasse une partie de type A est 0,6 et donc celle qu'il fasse une partie de type B est 0,4. Le joueur verra plus souvent la publicité insérée dans les jeux de type A.

Exercice III — 4 points

Commun à tous les candidats

Les cinq questions de cet exercice sont indépendantes.
Pour chacune des affirmations suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse et justifier la réponse choisie.
Une réponse non justifiée n'est pas prise en compte. Une absence de réponse n'est pas pénalisée.

1. Dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes, on considère l'équation $(E) : z^2 - 2\sqrt{3}z + 4 = 0$.
On note A et B les points du plan dont les affixes sont les solutions de (E).
On note O le point d'affixe 0. $\Delta = (-2\sqrt{3})^2 - 4 \times 4 = 12 - 16 = -4 < 0$; l'équation a deux solutions complexes conjuguées :
$z_1 = \dfrac{2\sqrt{3} - 2\mathrm{i}}{2} = \sqrt{3} - \mathrm{i}$ et $z_2 = \overline{z_1} = \sqrt{3} + \mathrm{i}$.
On note A le point d'affixe z_1 et B le point d'affixe $z_2 = \overline{z_1}$.
$OA = OB = |z_1| = \sqrt{\sqrt{3}^2 + 1^2} = \sqrt{4} = 2$.
$AB = 2$ (« évident ») donc $OA = OB = AB = 2$; le triangle OAB est équilatéral.
L'affirmation est **vraie**

2. On note u le nombre complexe : $u = \sqrt{3} + \mathrm{i}$ et on note $\overline{u}$ son conjugué.
$u = \sqrt{3} + \mathrm{i} = 2\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{1}{2}\mathrm{i}\right) = 2\left(\cos\dfrac{\pi}{6} + \mathrm{i}\sin\dfrac{\pi}{6}\right) = 2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}$.
On remarque que $2019 = 6 \times 336 + 3$ donc $u^{2019} = u^{6\times 336+3} = \left(u^6\right)^{336} \times u^3$.
$u^6 = 2^6 \times \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi} = -2^6$.
$u^{2019} = \left(-2^6\right)^{336} \times u^3$; or $u^3 = 2^3\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}} = 8\mathrm{i}$ d'où $\boxed{u^{2019} = 2^{2019}\mathrm{i}}$.
$\overline{u}^{2019} = \overline{u^{2019}} = \overline{2^{2019}\mathrm{i}} = -2^{2019}\mathrm{i}$.
Alors : $u^{2019} + \overline{u}^{2019} = \boxed{0}$.
L'affirmation est **fausse**.

3. Soit n un entier naturel non nul. On considère la fonction f_n définie sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$ par :
$$f_n(x) = x\mathrm{e}^{-nx+1}.$$
f_n est dérivable :

Pour tout $x \in [0\,;\,+\infty[$, $f_n'(x) = 1 \times \mathrm{e}^{-nx+1} + x \times (-n)\mathrm{e}^{-nx+1} = (1-nx)\mathrm{e}^{-nx+1}$ qui est du signe de $1-nx$ car $\mathrm{e}^{-nx+1} > 0$.

$1-nx = 0 \iff x = \dfrac{1}{n}$ et $1-nx > 0 \iff 0 \leqslant x \leqslant \dfrac{1}{n}$ car la fonction $x \mapsto -nx+1$ est affine décroissante.

$f_n'(x)$ est donc positive sur $\left[0\,;\,\dfrac{1}{n}\right]$ puis négative pour $x \geqslant \dfrac{1}{n}$.

f_n est donc croissante sur $\left(0\,;\,\dfrac{1}{n}\right)$ puis décroissante ; elle a donc un maximum, atteint en $x = \dfrac{1}{n}$.

L'affirmation est **vraie**

4. On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \cos(x)\mathrm{e}^{-x}$.
   Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $-1 \leqslant \cos x \leqslant 1 \Rightarrow -\mathrm{e}^{x} \leqslant f(x) \leqslant \mathrm{e}^{-x}$.
   Or $\lim\limits_{x \to +\infty} (-x) = -\infty$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} \mathrm{e}^{-x} = \lim\limits_{X \to -\infty} \mathrm{e}^{X} = 0$.
   D'après le théorème des gendarmes, $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$.
   La courbe $\mathscr{C}$ admet une asymptote en $+\infty$. L'affirmation est **vraie**
5. Soit A un nombre réel strictement positif.
   On considère l'algorithme ci-contre.
   On suppose que la variable I contient la valeur 15 en fin d'exécution de cet algorithme.

```
I ← 0
Tant que 2^I ⩽ A
    I ← I + 1
Fin Tant que
```

Si la variable I contient la valeur 15 en fin d'algorithme, on a $\begin{cases} 2^{14} \leqslant A \\ 2^{15} > A \end{cases}$ d'où

$14\ln 2 \leqslant \ln A \leqslant 15 \ln 2$.

L'affirmation est **fausse**.

Exercice III 5 points

Pour les candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

On note $\mathbb{Z}$ l'ensemble des entiers relatifs.

Dans cet exercice, on étudie l'ensemble S des matrices qui s'écrivent sous la forme $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, où a, b, c et d appartiennent à l'ensemble $\mathbb{Z}$ et vérifient : $ad - bc = 1$.

On note I la matrice identité $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Partie A

1. $6 \times (-4) - (-5) \times = -24 + 25 = 1$ donc $A \in S$.
2. Soit $A = \begin{pmatrix} a & 2 \\ 3 & d \end{pmatrix}$ une matrice. $A \in s \iff ad - 6 = 1 \iff ad = 7$.
   Or 7 est premier On obtient $(a\,;\,d) = (1\,;\,7)$; $(a\,;\,d) = (-1\,;\,-7)$; $(a\,;\,d) = (7\,;\,1)$ ou $(a\,;\,d) = (-7\,;\,-1)$

3. **a.** Résoudre dans $\mathbb{Z}$ l'équation $(E) : 5x-2y=1$. Puisque le couple $(1\ ;\ 2)$ est une solution de cette équation, celle-ci peut s'écrire :
$5x-2y=1 \iff 5x-2y=1=5\times 1-2\times 2 \iff 5(x-1)=2(y-2)$.
5 divise $5(x-1)$ et est premier avec 2 donc, d'après le théorème de Gauss, 5 divise $y-2$: $y-2=5k$, $k\in\mathbb{Z}$ d'où $y=2+5k$.
On remplace y par $5+2k$ dans l'équation; on obtient :$5(x-1)=2\times 5k$ d'où $x-1=2k$ qui donne $x=1+2k$.
L'ensemble des solutions est donc :

$$\boxed{\mathscr{S}=\{1+2k\ ;\ 2+5k\},\ k\in\mathbb{Z}}.$$

b. Une matrice de la forme $A=\begin{pmatrix}A & B\\ 2 & 5\end{pmatrix}$ appartient à S si, et seulement si, $5a+2b=1$, donc si, et seulement si, $a=1+2k$ et $b=2+5k$, $k\in\mathbb{Z}$.
Ces matrices sont de la forme $\begin{pmatrix}1+2k & 2+5k\\ 2 & 5\end{pmatrix}$, $k\in\mathbb{Z}$.

Partie B

Dans cette partie, on note $A=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}$ une matrice appartenant à l'ensemble S. On rappelle que a, b, c et d sont des entiers relatifs tels que $ad-bc=1$.

1. Puisque $A\in S$, $ad-bc=1 \iff ad+b\times(-c)=1$; alors, d'après le théorème de Gauss, a et b sont premiers entre eux.
2. Soit B la matrice : $B=\begin{pmatrix}d & -b\\ -c & a\end{pmatrix}$

a. $AB=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}d & -b\\ -c & a\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}ad-bc & 0\\ 0 & ad-bc\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=I$ donc $\boxed{AB=I}$.
On admet que $BA=AB$ donc $\boxed{BA=I}$.

b. $AB=I$ donc A est inversible et $\boxed{A^{-1}=B}$.

c. $A^{-1}=B=\begin{pmatrix}d & -b\\ -c & a\end{pmatrix}$: $da-(-c)\times(-b)=ad-bc=1$ donc $\boxed{A^{-1}\in S}$.

3. Soient x et y deux entiers relatifs. On note x' et y' les entiers relatifs tels que $\begin{pmatrix}x'\\ y'\end{pmatrix}=A\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}$.

a. $\begin{pmatrix}x'\\ y'\end{pmatrix}=A\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix}x'\\ y'\end{pmatrix}$.
On en déduit, en multipliant à gauche par B : $B\begin{pmatrix}x'\\ y'\end{pmatrix}=BA=\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}$ puisque $BA=I$.
Alors : $\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=B\begin{pmatrix}x'\\ y'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}d & -b\\ -c & a\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x'\\ y'\end{pmatrix}$.
On en déduit $\boxed{\begin{cases}x=dx'-by'\\ y=-cx'+ay'\end{cases}}$.

b. On note D le PGCD de x et y et on note D' le PGCD de x' et y'.
D' divise donc x' et y' donc divise $x=dx'-by'$ et $y=-cx'+ay'$; D' divise donc D.
De même : $\begin{cases}x'=ax+by\\ y'=cx+dy\end{cases}$ donc D qui divise x et y divise aussi x' et y' et divise alors aussi leur PGCD D'.
D divise D' et D' divise D donc $\boxed{D=D'}$.

4. On considère les suites d'entiers naturels (x_n) et (y_n) définies par : $x_0 = 2019$, $y_0 = 673$ et pour tout entier naturel n : $\left\{\begin{array}{l} x_{n+1} = 2x_n + 3y_n \\ y_{n+1} = x_n + 2y_n \end{array}\right.$

On a $\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$ avec $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \in S$ car $2 \times 2 - 1 \times 3 = 1$.

Nous sommes donc dans la situation précédente.

On en déduit que $\text{PGCD}\left(x_{n+1}\ ;\ y_{n+1}\right) = \text{PGCD}\left(x_n\ ;\ y_n\right)$.

En cascade, on en déduit que ce PGCD est celui de $x_0 = 2019$ et de $y_0 = 673$. Or $2019 = 3 \times 673$ donc leur PGCD est 673.

On en déduirait (par récurrence) que, pour tout n, $\boxed{\text{PGCD}\left(x_n\ ;\ y_n\right) = 673}$

Exercice IV — 5 points

Pour les candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Les parties A et B peuvent être traitées de manière indépendante.

On considère un cube $ABCDEFGH$ d'arête de longueur 1, dont la figure est donnée en annexe.
On note I le milieu du segment $[EF]$, J le milieu du segment $[EH]$ et K le point du segment $[AD]$ tel que $\overrightarrow{AK} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AD}$.
On note $\mathscr{P}$ le plan passant par I et parallèle au plan (FHK).

Partie A

Dans cette partie, les constructions demandées seront effectuées sans justification sur la figure donnée en annexe, à rendre avec la copie.

1. M est à l'intersection des droites (AE) et (HK) car ces deux droites non parallèles appartiennent au plan (ADHE).
2.
   - I et J sont les milieux des segments [EF] et [EH] donc d'après le théorème des milieux, les droites (IJ) et (FH) sont parallèles.
   - La droite (FM) est l'intersection des plans (AEF) et (FHK).
   - L'intersection du plan $\mathscr{P}$ et de la face ABFE est donc la droite parallèle à la droite (FM) passant par le point I.

Partie B

Dans cette partie, on munit l'espace du repère orthonormé $\left(\text{A}\,;\,\overrightarrow{\text{AB}}, \overrightarrow{\text{AD}}, \overrightarrow{\text{AE}}\right)$.
On rappelle que $\mathscr{P}$ est le plan passant par I et parallèle au plan (FHK).

1. **a.**
   - $\overrightarrow{\text{FH}}\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{n}\cdot\overrightarrow{\text{FH}} = 4\times(-1)+4\times 1+(-3)\times 0 = 0$ donc $\overrightarrow{\text{FH}}\cdot\overrightarrow{n} = 0$; $\overrightarrow{n}\perp\overrightarrow{\text{FH}}$.
   - $\overrightarrow{\text{FK}}\begin{pmatrix}-1\\\frac{1}{4}\\-1\end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{n}\cdot\overrightarrow{\text{FH}} = 4\times(-1)+4\times\frac{1}{4}+(-3)\times(-1) = 0$, donc $\overrightarrow{\text{FK}}\cdot\overrightarrow{n} = 0$; $\overrightarrow{n}\perp\overrightarrow{\text{FK}}$.

   $\overrightarrow{n}$ est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan (FHK) donc $\overrightarrow{n}$ est un vecteur normal à ce plan.

   b. Une équation cartésienne de ce plan est donc :
   $4(x-x_{\text{H}})+4\left(y-y_{\text{H}}\right)+(-3)(z-z_{\text{H}}) = 0 \iff 4(x-0)+4\left(y-1\right)+(-3)(z-1) = 0 \iff 4x+4(y-1)-3(z-1) = 0 \iff \boxed{4x+4y-3z-1=0}$.

   c. $\mathscr{P}$ et (FHK) sont parallèles donc $\overrightarrow{n}$ est un vecteur normal commun.
   Une équation cartésienne de $\mathscr{P}$ est :
   $4(x-x_{\text{I}})+4\left(y-y_{\text{I}}\right)+(-3)(z-z_{\text{I}}) = 0 \iff 4\left(x-\frac{1}{2}\right)+4\left(y\right)+(-3)(z-1) = 0 \iff$
   $\boxed{4x+4y-3z+1=0}$

d. Calculons les coordonnées du point M', point d'intersection du plan $\mathscr{P}$ et de la droite (AE).

Une représentation paramétrique de (AE) est $\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = t \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$.

On injecte les coordonnées de x, y et z dans l'équation cartésienne de $\mathscr{P}$:

$4 \times 0 + 4 \times 0 - 3t + 1 = 0 \iff t = -\dfrac{1}{3}$.

Les coordonnées de M' sont donc $\boxed{M'\left(0\,;\,0\,;\,-\dfrac{1}{3}\right)}$

2. On note Δ la droite passant par le point E et orthogonale au plan $\mathscr{P}$.

a. $\vec{n}$, vecteur normal au plan $\mathscr{P}$ est donc un vecteur directeur de Δ.

Une représentation paramétrique de Δ est donc :

$\Delta \begin{cases} x = 4t' \\ y = 4t' \\ z = 1 - 3t' \end{cases}$, $t' \in \mathbb{R}$.

b. Une équation du plan (ABC) est $z = 0$.

En remplaçant les expressions de x, y et z en fonction de t' dans cette équation, on trouve $1 - 3t' = 0 \iff t' = \dfrac{1}{3}$.

Les coordonnées de L sont donc $\boxed{L\left(\dfrac{4}{3}\,;\,\dfrac{4}{3}\,;\,0\right)}$.

c. Tracer les droite Δ sur la figure donnée en annexe.

d.
- Δ et (BF) ne sont pas sécantes.
- $\Delta \begin{cases} x &= & 4t' \\ y &= & 4t' \\ z &= & 1 - 3t' \end{cases}$, $t' \in \mathbb{R}$.

  Pour $t' = \dfrac{1}{4}$, on obtient le point de coordonnées $\left(1\,;\,1\,;\,\dfrac{1}{4}\right)$ qui est un point de la droite (CG), donc Δ et (CG) sont **sécantes** en ce point.

Annexe à l'exercice IV à rendre avec la copie