

## Corrigé du baccalauréat S Nouvelle Calédonie mars 2019

Durée : 4 heures

**Exercice 1**

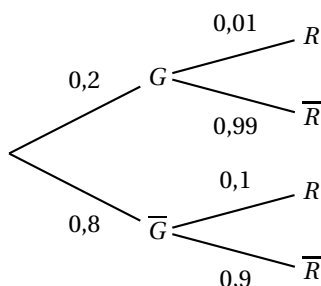
**5 points**

**Commun à tous les candidats**

**Les parties A, B et C peuvent être traitées indépendamment.**

**Partie A**

1. a.



b. L'évènement est  $G \cap R$ , donc sa probabilité est :

$$p(G \cap R) = p(G) \times p_G(R) = 0,2 \times 0,01 = 0,002.$$

c. On a de même :  $p(\bar{G} \cap R) = p(\bar{G}) \times p_{\bar{G}}(R) = 0,8 \times 0,1 = 0,08$ .

D'après la loi des probabilités totales :

$$p(R) = p(G \cap R) + p(\bar{G} \cap R) = 0,002 + 0,08 = 0,082.$$

d. Il faut trouver  $p_R(G) = \frac{p(G \cap R)}{p(R)} = \frac{0,002}{0,082} \approx 0,0024$  soit 0,002 au millième près.

2. Soit  $X$  la variable aléatoire prenant pour valeurs le coût d'entretien d'une voiture.

On va chercher le coût moyen par voiture, soit l'espérance mathématique de  $X$ .

Il y a trois évènements à considérer :

- $G$  qui correspond à une voiture sous garantie dont la probabilité est 0,2 et qui nécessite 0 € de dépense;
- $\bar{G} \cap \bar{R}$  qui correspond à une voiture qui n'est plus sous garantie mais qui ne nécessite pas de réparation, dont la probabilité est  $0,8 \times 0,9 = 0,72$  et qui nécessite 100 € de dépense;
- $\bar{G} \cap R$  qui correspond à une voiture qui n'est plus sous garantie mais qui nécessite une réparation, dont la probabilité est 0,08 et qui nécessite  $100 + 400 = 500$  € de dépense.

La loi de probabilité de  $X$  est :

évènement	$G$	$\bar{G} \cap \bar{R}$	$\bar{G} \cap R$
coût $x_i$	0 €	100 €	500 €
probabilité $p_i = P(X = x_i)$	0,2	0,72	0,08

$$E(X) = \sum x_i \times p_i = 0 + 100 \times 0,72 + 500 \times 0,08 = 72 + 40 = 112$$

Chaque voiture coûte en moyenne 112 €; il y a 2 500 voitures, ce qui fait une dépense totale de  $112 \times 2500 = 280\,000$  €.

Conclusion : le budget de 250 000 € sera insuffisant.

**Partie B**

1. Avec  $p = 0,80$  et  $n = 600$ , l'intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95 % est

$$I_{600} = \left[ p - 1,96 \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} ; p + 1,96 \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} \right] = \left[ 0,8 - 1,96 \frac{\sqrt{0,8 \times 0,2}}{\sqrt{600}} ; 0,8 + 1,96 \frac{\sqrt{0,8 \times 0,2}}{\sqrt{600}} \right]$$

$$\approx [0,768 ; 0,832].$$

2. Pour les 600 derniers contrats la fréquence de contrats de courte durée est égale à

$$f = \frac{550}{600} \approx 0,917.$$

Or  $0,917 \notin I_{600}$ , donc, au risque de 5 %, l'affirmation de la directrice n'est pas correcte.

**Partie C**

1. On doit trouver  $p(500 \leq Y \leq 600)$ ; la calculatrice donne  $\approx 0,2417$ , soit 0,242 au millième près.  
 2. La calculatrice donne pour  $p(Y \leq a) = 0,15$ ,  $a \approx 346$  km.

**Exercice 2**

**6 points**

**Commun à tous les candidats**

**Partie A : Étude d'une fonction auxiliaire**

Soit  $g$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par

$$g(x) = (x+2)e^{x-4} - 2.$$

1. On sait que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x+2) = +\infty$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{x-4} = +\infty$ , donc par produit de limites :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty.$$

2. On a  $g(x) = xe^{x-4} + 2e^{x-4} - 2 = xe^x \times e^{-4} + 2e^{x-4} - 2$ .

On sait que  $\lim_{x \rightarrow -\infty} xe^x = 0$ ; donc  $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-4} xe^x = 0$

$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{x-4} = 0$ , donc par somme de limites :  $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = -2$ .

3.  $g'(x) = 1 \times e^{x-4} + (x+2) \times 1 \times e^{x-4} = e^{x-4}(1+x+2) = e^{x-4}(x+3)$ .

On sait que quel soit  $x \in \mathbb{R}$ ,  $e^{x-4} > 0$ ; le signe de  $g'(x)$  est donc celui de  $x+3$  qui s'annule pour  $x = -3$  est positif pour  $x > -3$  et négatif pour  $x < -3$ , d'où le tableau de variations :

$x$	$-\infty$	$-3$	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	-2		$+\infty$
	↘		↗
	$\approx -2,001$		

On a  $g(-3) = (-3+2)e^{-3-4} - 2 = -e^{-7} - 2 \approx -2,001$ .

4. D'après le tableau de variations : sur l'intervalle  $]-3 ; +\infty[$ ,  $f(-3) < 0$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$ .

La fonction  $g$  étant continue sur cet intervalle car dérivable sur ce même intervalle; il existe donc un réel unique  $\alpha$ ,  $\alpha \in ]-3 ; +\infty[$  tel que  $g(\alpha) = 0$ .

**5. Conclusion :**

- $g(\alpha) = 0$ ;
- sur  $] -\infty ; \alpha[$ ,  $g(x) < 0$ ;
- sur  $]\alpha ; +\infty[$ ,  $g(x) > 0$

6. La calculatrice donne  $g(3,069) \approx -0,002006$  et  $g(3,070) \approx 0,00038$ , donc  $\alpha \approx 3,070$  à  $10^{-3}$  près.

**Partie B : Étude de la fonction  $f$** 

Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par

$$f(x) = x^2 - x^2 e^{x-4}.$$

$$1. f(x) = 0 \iff x^2 - x^2 e^{x-4} = 0 \iff x^2(1 - e^{x-4}) = 0 \iff \begin{cases} x^2 = 0 \\ 1 - e^{x-4} = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 0 \\ 1 = e^{x-4} \end{cases} \iff \begin{cases} x = 0 \\ 0 = x - 4 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 0 \\ 4 = x \end{cases}$$

L'équation a deux solutions : 0 et 4.

2. De la question 5 de la partie A on déduit que :

- $f'(\alpha) = 0$ ;
- $f'(x) < 0$  sur  $] -\infty ; 0[$ ;
- $f'(x) > 0$  sur  $]0 ; \alpha[$ ;
- $f'(x) < 0$  sur  $]\alpha ; +\infty[$ .

La fonction est donc croissante sur  $]0 ; \alpha[$  et décroissante sur  $] -\infty ; 0[$  et sur  $]\alpha ; +\infty[$ .

On a  $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 e^{x-4} = 0$  et  $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 = +\infty$ , donc  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$ .

$$f(0) = 0;$$

$$f(\alpha) = \alpha^2 - \alpha^2 e^{\alpha-4};$$

$$f(x) = x^2(1 - e^{x-4}).$$

Or  $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{x-4} = +\infty$ , donc  $\lim_{x \rightarrow +\infty} 1 - e^{x-4} = -\infty$ ; d'autre part  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty$  et par produit de limites  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$ .

Conclusion : la fonction est décroissante  $] -\infty ; 0[$  de plus l'infini à zéro croissante sur  $]0 ; \alpha[$  de zéro à  $f(\alpha)$  puis décroissante sur  $]\alpha ; +\infty[$  de  $f(\alpha)$  à moins l'infini.

3. D'après la question précédente sur l'intervalle  $]0 ; +\infty[$  la fonction est croissante puis décroissante :  $f(\alpha)$  est donc le maximum de la fonction sur cet intervalle.

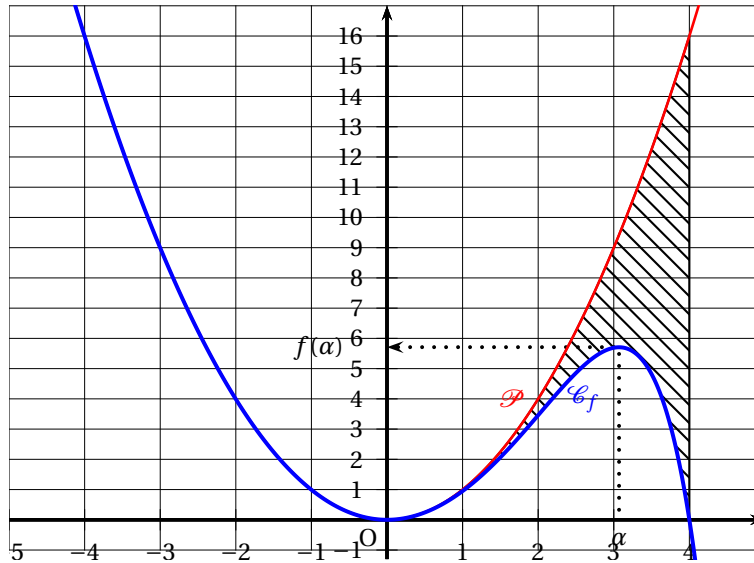
On a vu à la question A. 3. que  $\alpha$  est le réel tel que  $g(\alpha) = 0 \iff (\alpha + 2)e^{\alpha-4} - 2 = 0 \iff$

$$(\alpha + 2)e^{\alpha-4} = 2 \iff e^{\alpha-4} = \frac{2}{\alpha + 2}.$$

$$\text{Donc } f(\alpha) = \alpha^2(1 - e^{\alpha-4}) = \alpha^2 \left(1 - \frac{2}{\alpha + 2}\right) = \alpha^2 \left(\frac{\alpha + 2 - 2}{\alpha + 2}\right) = \alpha^2 \times \frac{\alpha}{\alpha + 2}.$$

$$\text{Finalement } f(\alpha) = \frac{\alpha^3}{\alpha + 2} \approx 5,71$$

**Partie C : Aire d'un domaine**



1. Soit  $d$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par :  

$$d(x) = x^2 - f(x) = x^2 - (x^2 - x^2 e^{x-4}) = x^2 e^{x-4}.$$
 Cette fonction produit de deux fonctions positives est positive et ne s'annule que pour  $x = 0$ .  
 Géométriquement ceci montre que la parabole  $\mathcal{P}$  est au dessus de la courbe  $\mathcal{C}_f$ , le seul point commun étant l'origine.
2. On admet qu'une primitive de la fonction  $f$  sur  $\mathbb{R}$  est définie par :  $F(x) = \frac{x^3}{3} - (x^2 - 2x + 2) e^{x-4}$ .

On a vu à la question précédente que sur l'intervalle  $[0; 4]$  la courbe  $\mathcal{P}$  est au dessus de la courbe  $\mathcal{C}_f$ , donc l'aire de la surface limitée par la courbe  $\mathcal{P}$ , la courbe  $\mathcal{C}_f$  et les droites d'équation  $x = 0$  et  $x = 4$ , est en unité d'aire égale à l'intégrale :

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= \int_0^4 [x^2 - f(x)] dx = \left[ \frac{x^3}{3} - F(x) \right]_0^4 = \left[ \frac{4^3}{3} - \left( \frac{4^3}{3} - (4^2 - 2 \times 4 + 2) e^{4-4} \right) \right] - \left[ 0 - (0 - 2e^{0-4}) \right] \\ &= 10 - 2e^{-4} \text{ (u. a.)} \end{aligned}$$

**Exercice 3**

**4 points**

**Commun à tous les candidats**

Pour les questions 1 à 3, on se place dans un plan muni du repère orthonormé direct  $(O; \vec{u}, \vec{v})$ .

1. Soit (E) l'équation d'inconnue le nombre complexe  $z : z(z^2 - 8z + 32) = 0$ .  
**Affirmation 1** : Les points dont les affixes sont les solutions de l'équation (E) sont les sommets d'un triangle d'aire égale à 16 unités d'aire.

On résout dans  $\mathbb{C}$  l'équation  $z(z^2 - 8z + 32) = 0$ .

- $z = 0$  ou
- $z^2 - 8z + 32 = 0$ ;  $\Delta = (-8)^2 - 4 \times 1 \times 32 = -64 = -8^2$

Cette équation a donc deux solutions

$$z_1 = \frac{-b + i\sqrt{-\Delta}}{2a} = \frac{8 + 8i}{2} = 4 + 4i \text{ et } z_2 = 4 - 4i.$$

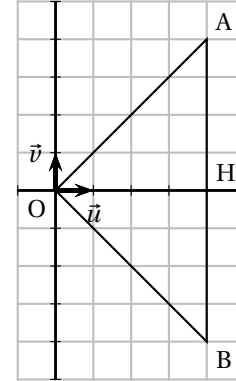
Soient A et B les points d'affixes respectives  $z_1$  et  $z_2$ .

Le triangle OAB est isocèle en O et a pour aire  $\mathcal{A} = \frac{OH \times AB}{2}$

où H est le milieu de [AB].

Le point H a pour affixe  $\frac{z_1 + z_2}{2} = 4$  donc OH = 4.

$AB = |(4 + 4i) - (4 - 4i)| = |8i| = 8$ ; donc  $\mathcal{A} = \frac{4 \times 8}{2} = 16$ .



**Affirmation 1 vraie**

2. Soit  $\mathcal{E}$  l'ensemble des points dont les affixes  $z$  vérifient  $|z - 3| = |z + 3|$ .

**Affirmation 2** : L'ensemble  $\mathcal{E}$  est le cercle de centre O et de rayon 3.

Soient M, A et B les points d'affixes respectives  $z$ , 3 et  $-3$ .

$|z - 3| = MA$  et  $|z + 3| = MB$ ; donc  $|z - 3| = |z + 3| \iff MA = MB$ .

L'ensemble  $\mathcal{E}$  est donc une droite, la médiatrice de [AB].

**Affirmation 2 fausse**

3. On considère la suite de nombres complexes  $(z_n)$  définie pour tout  $n$  par :  $z_n = (1 - i\sqrt{3})^n$ .

Pour tout entier naturel  $n$ , on note  $M_n$  le point d'affixe  $z_n$ .

**Affirmation 3** : Pour tout entier naturel  $n$ , les points  $M_n$ , O et  $M_{n+3}$  sont alignés.

On sait que  $(\overrightarrow{OM_{n+3}}, \overrightarrow{OM_n}) = \arg\left(\frac{z_{M_{n+3}} - z_O}{z_{M_n} - z_O}\right)$

donc  $(\overrightarrow{OM_{n+3}}, \overrightarrow{OM_n}) = \arg\left(\frac{(1 - i\sqrt{3})^{n+3}}{(1 - i\sqrt{3})^n}\right) = \arg((1 - i\sqrt{3})^3) = \arg(-8) = \pi \quad [2\pi]$ .

On en déduit que les trois points  $M_n$ , O et  $M_{n+3}$  sont alignés.

**Affirmation 3 vraie**

4. On considère l'équation d'inconnue le nombre réel  $x$  :  $\sin(x)(2\cos^2(x) - 1) = 0$ .

**Affirmation 4** : Cette équation admet exactement quatre solutions sur l'intervalle  $]-\pi ; \pi]$  qui sont :  $-\frac{\pi}{4}$ ;  $0$ ;  $\frac{\pi}{4}$  et  $\pi$ .

$\frac{3\pi}{4} \in ]-\pi ; \pi]$ ; or  $\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$  donc  $2\cos^2\left(\frac{3\pi}{4}\right) - 1 = 0$ .

On en déduit que  $\frac{3\pi}{4}$  est une solution de l'équation mais ce n'est pas une des quatre solutions proposées.

**Affirmation 4 fausse**

**Exercice 4**

**5 points**

**Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité**

On considère la suite  $(u_n)$  à valeurs réelles définie par  $u_0 = 1$  et, pour tout  $n$ ,  $u_{n+1} = \frac{u_n}{u_n + 8}$ .

### Partie A : Conjectures

Les premières valeurs de la suite  $(u_n)$  ont été calculées à l'aide d'un tableur dont voici une capture d'écran :

	A	B
1	$n$	$u_n$
2	0	1
3	1	0,111 111 11
4	2	0,013 698 63
5	3	0,001 709 4
6	4	0,000 213 63
7	5	2,670 3E-05
8	6	3,337 9E-06
9	7	4,172 3E-07
10	8	5,215 4E-08
11	9	6,519 3E-09
12	10	8,149 1E-10

- La formule à entrer dans la cellule B3 et à copier vers le bas pour obtenir les valeurs des premiers termes de la suite  $(u_n)$  est  $= B2 / (B2 + 8)$
- La suite  $(u_n)$  semble décroissante.
- La suite  $(u_n)$  semble converger vers 0.
- On écrit un algorithme calculant  $u_{30}$  :

Variables	$i$ entier et $u$ réel
Initialisation	$u$ prend la valeur 1
Traitement	Pour $i$ variant de 1 à 30 $u$ prend la valeur $\frac{u}{u+8}$
	Fin pour
Sortie	Afficher $u$

### Partie B : Étude générale

- On va démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel  $n$ , on a  $u_n > 0$ .
  - Pour  $n = 0$ ,  $u_n = u_0 = 1 > 0$ ; donc la propriété est vraie au rang 0.
  - On suppose la propriété vraie pour un rang  $n$  quelconque, c'est-à-dire que  $u_n > 0$ .

$$u_{n+1} = \frac{u_n}{u_n + 8}$$

Or  $u_n > 0$  donc  $u_n + 8 > 0$  donc  $\frac{u_n}{u_n + 8} > 0$ ; on a donc démontré que  $u_{n+1} > 0$ .

- On a vérifié que la propriété était vraie pour  $n = 0$ . On a démontré que la propriété était héréditaire pour tout  $n \geq 0$ . Donc, d'après le principe de récurrence, on peut dire que la propriété est vraie pour tout  $n \geq 0$ .

On a donc démontré que  $u_n > 0$  pour tout  $n$ .

$$2. \text{ Pour tout } n : u_{n+1} - u_n = \frac{u_n}{u_n + 8} - u_n = u_n \left( \frac{1}{u_n + 8} - 1 \right) = u_n \left( \frac{1 - u_n - 8}{u_n + 8} \right) = \frac{u_n(-u_n - 7)}{u_n + 8}$$

Pour tout  $n$ , on a  $u_n > 0$  donc  $u_n + 8 > 0$  et  $-u_n - 7 < 0$ .

On en déduit que  $\frac{u_n(-u_n - 7)}{u_n + 8} < 0$  et donc que  $u_{n+1} - u_n < 0$ .

La suite  $(u_n)$  est donc décroissante.

3. La suite  $(u_n)$  est décroissante et minorée par 0.

Donc, d'après le théorème de la convergence monotone, la suite  $(u_n)$  est convergente.

### Partie C : Recherche d'une expression du terme général

On définit la suite  $(v_n)$  en posant, pour tout entier naturel  $n$ ,  $v_n = 1 + \frac{7}{u_n}$ .

On en déduit que  $v_n - 1 = \frac{7}{u_n}$  donc que  $u_n = \frac{7}{v_n - 1}$ .

$$1. \begin{aligned} \bullet v_{n+1} &= 1 + \frac{7}{u_{n+1}} = 1 + \frac{7}{\frac{u_n}{u_n + 8}} = 1 + \frac{7(u_n + 8)}{u_n} = 1 + \frac{7u_n}{u_n} + \frac{56}{u_n} = 1 + 7 + \frac{56}{\frac{7}{v_n - 1}} = 8 + 8(v_n - 1) \\ &= 8 + 8v_n - 8 = 8v_n \\ \bullet v_0 &= 1 + \frac{7}{u_0} = 1 + \frac{7}{1} = 8 \end{aligned}$$

Donc la suite  $(v_n)$  est géométrique de raison  $q = 8$  et de premier terme  $v_0 = 8$ .

2. On déduit de la question précédente que, pour tout  $n$ ,  $v_n = v_0 \times q^n = 8 \times 8^n = 8^{n+1}$ .

Or  $u_n = \frac{7}{v_n - 1}$ , donc, pour tout  $n$ , on a  $u_n = \frac{7}{8^{n+1} - 1}$ .

3.  $8 > 1$  donc  $\lim_{n \rightarrow +\infty} 8^{n+1} = +\infty$  donc  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{7}{8^{n+1} - 1} = 0$  ce qui veut dire que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$ .

4. On cherche dans cette question le plus petit entier naturel  $n_0$  tel que, pour tout entier naturel  $n$  supérieur ou égal à  $n_0$ ,  $u_n < 10^{-18}$ .

On sait que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$ ; donc, d'après la définition de la limite d'une suite, on peut dire qu'à partir d'un certain rang  $n_0$ , tous les termes de la suite seront dans l'intervalle  $] -10^{-18}; 10^{-18} [$ . Comme  $u_n > 0$  pour tout  $n$ , on peut dire qu'il existe un rang  $n_0$  tel que, pour  $n > n_0$ , on ait  $u_n < 10^{-18}$ .

On résout l'inéquation  $u_n < 10^{-18}$ .

$$\begin{aligned} u_n < 10^{-18} &\Leftrightarrow \frac{7}{8^{n+1} - 1} < 10^{-18} \Leftrightarrow 7 < 10^{-18} (8^{n+1} - 1) \Leftrightarrow 7 \times 10^{18} + 1 < 8^{n+1} \\ &\Leftrightarrow \ln(7 \times 10^{18} + 1) < \ln(8^{n+1}) \Leftrightarrow \ln(7 \times 10^{18} + 1) < (n+1) \ln(8) \\ &\Leftrightarrow \frac{\ln(7 \times 10^{18} + 1)}{\ln(8)} < n+1 \Leftrightarrow n > \frac{\ln(7 \times 10^{18} + 1)}{\ln(8)} - 1 \end{aligned}$$

Or  $n > \frac{\ln(7 \times 10^{18} + 1)}{\ln(8)} - 1 \approx 19,87$  donc c'est à partir de  $n_0 = 20$  que  $u_n < 10^{-18}$ .