

## Corrigé du baccalauréat Polynésie 2 juin 2021

### ÉPREUVE D'ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ n° 2

**EXERCICE 1**

**5 points**

**Commun à tous les candidats**

On considère la suite  $(u_n)$  définie par  $u_0 = 10\,000$  et pour tout entier naturel  $n$  :

$$u_{n+1} = 0,95u_n + 200.$$

1. •  $u_1 = 0,95 \times u_0 + 200 = 0,95 \times 10\,000 + 200 = 9\,500 + 200 = 9\,700.$   
 •  $u_2 = 0,95 \times u_1 + 200 = 0,95 \times 9\,700 + 200 = 9\,215 + 200 = 9\,415.$
2. a. On démontre par récurrence, que pour tout entier naturel  $n$  :  $u_n > 4\,000.$

*Initialisation* :  $u_0 = 10\,000 > 4\,000$  : l'inégalité est vraie au rang 0 ;

*Hérédité* : supposons que pour  $n \in \mathbb{N}$ , on ait  $u_n > 4\,000$ , alors par produit par  $0,95 > 0$ , on a  $0,95u_n > 0,95 \times 4\,000$ , soit :

$0,95u_n > 3\,800$ , et en ajoutant 200 à chaque membre :

$0,95u_n + 200 > 3\,800 + 200$ , c'est-à-dire  $u_{n+1} > 4\,000$  : la relation est vraie au rang  $n + 1$ .

Conclusion : l'inégalité est vraie au rang 0 et si elle est vraie au rang  $n \in \mathbb{N}$ , elle est vraie au rang  $n + 1$  : d'après le principe de récurrence  $u_n > 4\,000$  quel que soit le naturel  $n$ .

- b. On sait que si la suite est décroissante et minorée par 4 000, elle converge vers une limite  $\ell$ , avec  $\ell \geq 4\,000$ .
3. a. Pour  $n = 0$ , on a  $v_0 = u_0 - 4\,000 = 10\,000 - 4\,000 = 6\,000.$

b. Au choix :

*Méthode 1* : pour  $n \in \mathbb{N}$ , on a :

$$v_{n+1} = u_{n+1} - 4\,000 = 0,95u_n + 200 - 4\,000 = 0,95u_n - 3\,800 = 0,95 \left( u_n - \frac{3\,800}{0,95} \right) = 0,95(u_n - 4\,000) = 0,95v_n.$$

L'égalité  $v_{n+1} = 0,95v_n$  vraie quel que soit  $n \in \mathbb{N}$  montre que la suite  $(v_n)$  est géométrique de raison égale à 0,95.

*Méthode 2* : pour  $n \in \mathbb{N}$ , on a vu que  $u_n > 4\,000$ , donc  $v_n = u_n - 4\,000 > 0$ .

$$\begin{aligned} \text{On peut donc calculer : } \frac{v_{n+1}}{v_n} &= \frac{u_{n+1} - 4\,000}{u_n - 4\,000} = \frac{0,95u_n + 200 - 4\,000}{u_n - 4\,000} = \\ &= \frac{0,95u_n - 3\,800}{u_n - 4\,000} = \frac{0,95(u_n - \frac{3\,800}{0,95})}{u_n - 4\,000} = \frac{0,95(u_n - 4\,000)}{u_n - 4\,000} = 0,95. \end{aligned}$$

Cette égalité vraie pour tout naturel  $n$ , montre que la suite  $(v_n)$  est géométrique de raison égale à 0,95.

c. D'après le résultat précédent, on sait que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$v_n = v_0 \times 0,95^n = 6\,000 \times 0,95^n.$$

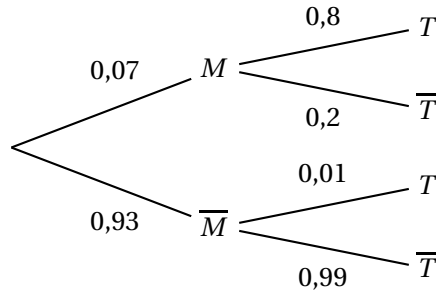
$$\text{Or } v_n = u_n - 4\,000 \iff u_n = v_n + 4\,000 = 6\,000 \times 0,95^n + 4\,000.$$

d. Comme  $0 < 0,95 < 1$ , on sait que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} 0,95^n = 0$ , donc  $\lim_{n \rightarrow +\infty} 6\,000 \times 0,95^n = 0$ , d'où  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 4\,000$  (par somme de limites).

4.  $u_n$  est égal au nombre d'individus de l'espèce animale au rang  $n$ ; d'après le résultat précédent ce nombre va diminuer et se rapprocher de 4 000 soit moins de la moitié de la population initiale : le responsable a raison.

**EXERCICE 2****5 points****Commun à tous les candidats**

1. On construit un arbre pondéré modélisant la situation proposée :



2. **a.** On a  $P(M \cap T) = P(M) \times P_M(T) = 0,07 \times 0,8 = 0,056$ .  
**b.** On a de même  $P(\overline{M} \cap T) = P(\overline{M}) \times P_{\overline{M}}(T) = 0,93 \times 0,01 = 0,0093$ .  
 D'après la loi des probabilités totales :  
 $P(T) = P(M \cap T) + P(\overline{M} \cap T) = 0,056 + 0,0093 = 0,0653$ .
3. On calcule  $P_T(M) = \frac{P(T \cap M)}{P(T)} = \frac{P(M \cap T)}{P(T)} = \frac{0,056}{0,0653} \approx 0,85758$  soit 0,86 à  $10^{-2}$  près.
4. **a.**  $X$  suit une loi binomiale de paramètres  $n = 10$  avec  $p = 0,0653$ .  
**b.** On a  $P(X = 2) = \binom{10}{2} \times 0,0653^2 \times (1 - 0,0653)^{10-2} = \binom{10}{2} \times 0,0653^2 \times 0,9347^8 = 45 \times 0,0653^2 \times 0,9347^8 \approx 0,1118$ , soit 0,11 à  $10^{-2}$  près.
5. On a  $P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - \binom{n}{0} \times 0,0653^0 \times (1 - 0,0653)^n = 1 - 0,9347^n$  et on veut que :

$P(X \geq 1) > 0,99 \iff 1 - 0,9347^n > 0,99 \iff 0,01 > 0,9347^n$  soit en prenant le logarithme népérien :

$$\ln 0,01 > n \ln 0,9347 \iff \frac{\ln 0,01}{\ln 0,9347} < n.$$

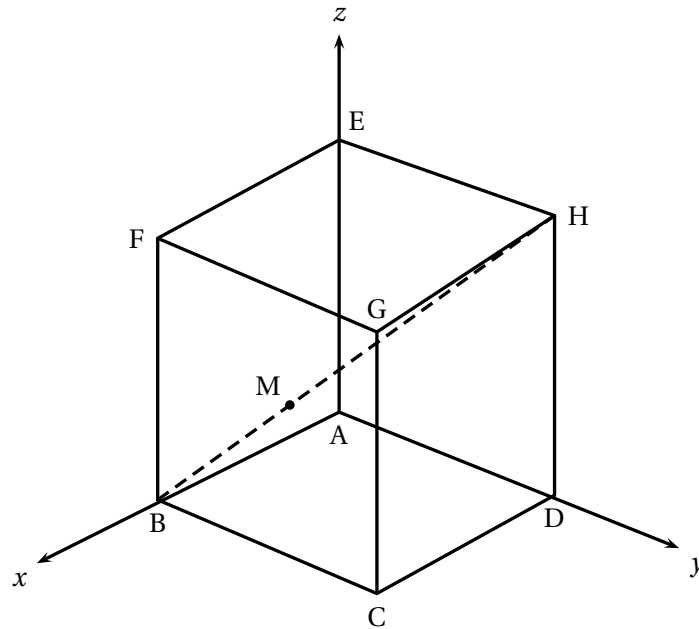
Or  $\frac{\ln 0,01}{\ln 0,9347} \approx 68,2$ .

Il faut donc tester au moins 69 personnes au minimum.

## EXERCICE 3

5 points

Commun à tous les candidats



1. Dans le repère  $(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$ , on a  
 $B(1; 0; 0)$ ,  $D(0; 1; 0)$ ,  $E(0; 0; 1)$ ,  $G(1; 1; 1)$ ,  $H(0; 1; 1)$ .
2. **a.**  $[EG]$ ,  $[GD]$  et  $[ED]$  sont les hypoténuses de triangles rectangles isocèles de côté 1, donc  $EG = GD = ED = \sqrt{2}$  : le triangle EGD est équilatéral.  
**b.** Puisque  $c = \sqrt{2}$ , on a  $\mathcal{A}(EGD) = \frac{\sqrt{3}}{4} \times (\sqrt{2})^2 = \frac{\sqrt{3}}{4} \times 2 = \frac{\sqrt{3}}{2}$ .
3. On a  $\overrightarrow{BH} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ , donc  $\overrightarrow{BM} = \frac{1}{3} \overrightarrow{BH} \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_M - 1 \\ y_M - 0 \\ z_M - 0 \end{pmatrix}$ .  
 On a donc :  $x_M = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$ ;  $y_M = \frac{1}{3}$ ;  $z_M = \frac{1}{3}$ .  
 Conclusion : M a pour coordonnées  $\left(\frac{2}{3}; \frac{1}{3}; \frac{1}{3}\right)$ .
4. **a.** On a  $\overrightarrow{EG} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$  : donc  $\vec{n} \cdot \overrightarrow{EG} = -1 + 1 + 0 = 0$  :  
 $\overrightarrow{ED} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$  : donc  $\vec{n} \cdot \overrightarrow{ED} = 0 + 1 - 1 = 0$ .  
 Conclusion :  $\vec{n}$  est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan (EGD) : c'est un vecteur normal à ce plan.  
**b.** On sait qu'un plan d'équation  $ax + by + cz + d = 0$  a un vecteur normal de coordonnées  $(a; b; c)$ , donc :

$$P(x; y; z) \in (\text{EGD}) \iff -x + y + z + d = 0.$$

$$\text{Comme } E(0; 0; 1) \in (\text{EGD}) \iff 0 + 0 + 1 + d = 0 \iff d = -1.$$

Finalement : le plan (EGD) a pour équation  $-x + y + z - 1 = 0$ .

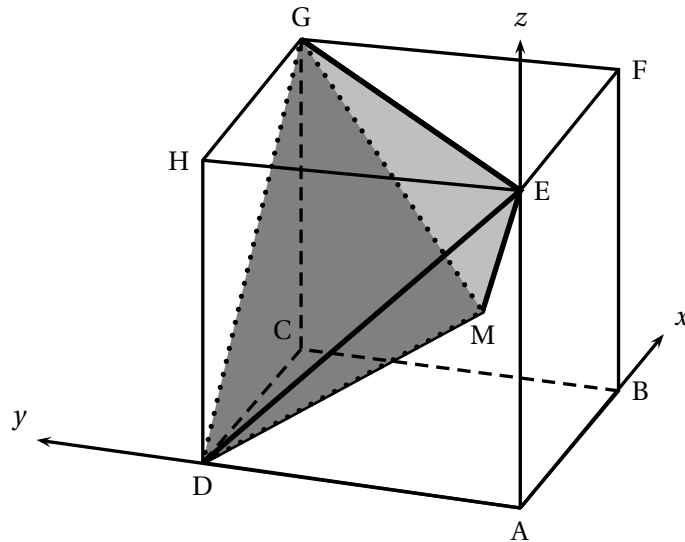
c. La droite  $\mathcal{D}$  contient M et a pour vecteur directeur  $\vec{n}$  vecteur normal au plan

$$(\text{EGD}), \text{ donc avec } \overrightarrow{MP} \begin{pmatrix} x - \frac{2}{3} \\ y - \frac{1}{3} \\ z - \frac{1}{3} \end{pmatrix} :$$

$$P(x; y; z) \in \mathcal{D} \iff \overrightarrow{MP} = t \vec{n}, \text{ avec } t \in \mathbb{R}, \text{ soit :}$$

$$\begin{cases} x - \frac{2}{3} = -t \\ y - \frac{1}{3} = t \\ z - \frac{1}{3} = t \end{cases}, t \in \mathbb{R} \iff \begin{cases} x = \frac{2}{3} - t \\ y = \frac{1}{3} + t \\ z = \frac{1}{3} + t \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

5. Le cube ABCDEFGH est représenté ci-dessus selon une vue qui permet de mieux percevoir la pyramide GEDM, en gris sur la figure :



a. On a vu que la droite  $\mathcal{D}$  contient M et est perpendiculaire au plan (EBD) : c'est donc la hauteur de la pyramide GEDM issue de M. Le pied de cette hauteur K appartient donc à  $\mathcal{D}$  et au plan (EGD); ses coordonnées vérifient donc les équations :

$$\begin{cases} x & = & \frac{2}{3} - t \\ y & = & \frac{1}{3} + t \\ z & = & \frac{1}{3} + t \\ -x + y + z - 1 & = & 0 \end{cases} \Rightarrow -\left(\frac{2}{3} - t\right) + \frac{1}{3} + t + \frac{1}{3} + t - 1 = 0 \iff 3t = 1 \iff t = \frac{1}{3}.$$

En remplaçant  $t$  par  $\frac{1}{3}$  dans l'équation paramétrique de  $\mathcal{D}$ , on obtient :

$$\begin{cases} x & = & \frac{2}{3} - \frac{1}{3} = \frac{1}{3} \\ y & = & \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3} \\ z & = & \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3} \end{cases}$$

Conclusion : K a pour coordonnées  $\left(\frac{1}{3}; \frac{2}{3}; \frac{2}{3}\right)$ .

b. On en déduit  $\overrightarrow{KM} \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$ .

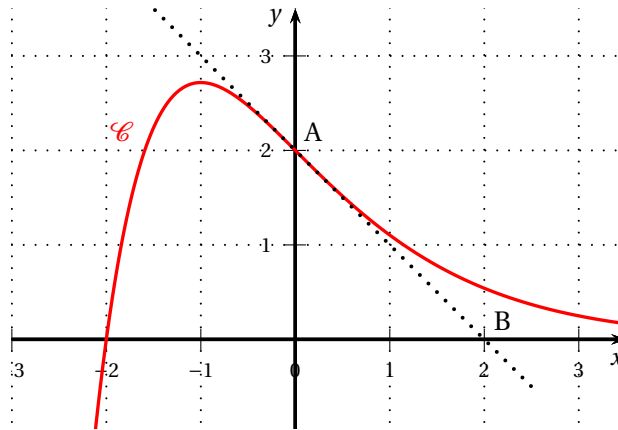
D'où  $KM^2 = \frac{1}{9} + \frac{1}{9} + \frac{1}{9} = \frac{3}{9}$ ; on en déduit  $KM = \frac{\sqrt{3}}{3}$ .

Comme  $\mathcal{A}(EGD) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ , le volume de la pyramide GEDM est :  $\frac{\frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{3}}{3} = \frac{1}{6}$ .

### EXERCICE au choix du candidat

5 points

#### EXERCICE A



#### Partie 1

- A a pour ordonnée  $f(0) = 2$ ;
  - Le nombre dérivé  $f'(0) = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{0 - 2}{2 - 0} = \frac{-2}{2} = -1$ .
- La fonction  $f$  semble convexe sur l'intervalle  $[0; +\infty[$ .

#### Partie 2

On note (E) l'équation différentielle :  $y' = -y + e^{-x}$ .

- On sait que les solutions de l'équation (H) :  $y' = -y$  sont les fonctions  $x \mapsto Ke^{-x}$ , avec  $K \in \mathbb{R}$ .
- Les solutions de l'équation (E) sont donc les fonctions

$$x \mapsto xe^{-x} + Ke^{-x} = (x + K)e^{-x}, K \in \mathbb{R}.$$

3. Avec  $f(x) = (x + K)e^{-x}$  et  $f(0) = 2$ , on a :  $(0 + K)e^{-0} = 2 \iff K = 2$ .  
Conclusion :  $f(x) = (x + 2)e^{-x}$ .

### Partie 3

1. a. Puisque  $f$  est solution de l'équation différentielle (E); on a donc  
 $f'(x) = -f(x) + e^{-x} = -(x + 2)e^{-x} + e^{-x} = e^{-x}(-x - 2 + 1) = (-x - 1)e^{-x}$ .
- b. Comme quel que soit  $x \in \mathbb{R}$ ,  $e^{-x} > 0$ , le signe de  $f'(x)$  est celui de  $-x - 1$ . Donc :  
 $-x - 1 > 0 \iff -1 > x \iff x < -1$ ;  
 $-x - 1 < 0 \iff -1 < x \iff x > -1$ ;  
 $-x - 1 = 0 \iff -1 = x$ .
- La fonction est donc croissante sur  $] -\infty ; -1[$ , décroissante sur  $] -1 ; +\infty[$  et a donc un maximum  $f(-1) = (-1 + 2)e^{-(-1)} = e$ .
2. a. De  $f'(x) = -f(x) + e^{-x}$ , on obtient en dérivant :  
 $f''(x) = -f'(x) - e^{-x} = -(-x - 1)e^{-x} - e^{-x} = e^{-x}(x + 1 - 1) = xe^{-x}$ .
- b. D'après le résultat précédent sur  $[0 ; +\infty[$ ,  $x \geq 0$  et  $e^{-x} > 0$ , donc le produit  $xe^{-x} \geq 0$  : la dérivée seconde est positive, la fonction  $f$  est convexe sur  $[0 ; +\infty[$ .

## EXERCICE B

### Partie 1 : Étude d'une fonction auxiliaire

Soit la fonction  $f$  définie sur l'intervalle  $[1; 4]$  par :  $f(x) = -30x + 50 + 35 \ln x$ .

1. a. Sur l'intervalle  $[1; 4]$ ,  $f'(x) = -30 + \frac{35}{x} = \frac{-30x + 35}{x} = \frac{35 - 30x}{x}$ .
- b. Puisque  $1 \leq x \leq 4$ ,  $x > 0$ , donc le signe de  $f'(x)$  est celui du numérateur  $35 - 30x = 5(7 - 6x)$  donc du facteur  $7 - 6x$ .  
 $7 - 6x > 0 \iff 7 > 6x \iff \frac{7}{6} > x \iff x < \frac{7}{6}$ ;  
 $7 - 6x < 0 \iff 7 < 6x \iff \frac{7}{6} < x \iff x > \frac{7}{6}$ ;  
 $7 - 6x = 0 \iff 7 = 6x \iff \frac{7}{6} = x \iff x = \frac{7}{6}$ .
- c. La fonction  $f$  est donc croissante sur  $\left[1; \frac{7}{6}\right]$ , décroissante sur  $\left[\frac{7}{6}; 4\right]$  et a donc un maximum :  $f\left(\frac{7}{6}\right) = -30 \times \frac{7}{6} + 50 + 35 \ln \frac{7}{6} = -35 + 50 + 35 \ln \frac{7}{6} = 15 + 35 \ln \frac{7}{6} \approx 20,4$ .
2.  $f$  décroît sur  $\left[\frac{7}{6}; 4\right]$  de  $f\left(\frac{7}{6}\right) = 15 + 35 \ln \frac{7}{6} \approx 20,4$  à  $f(4) = -120 + 50 + 35 \ln 4 = 35 \ln 4 - 70 \approx -21,5$ .

$x$	1	$\frac{7}{6}$	$\alpha$	4
$f$	20	$\approx 20,4$	0	$\approx -21,4$

Sur l'intervalle  $\left[\frac{7}{6}; 4\right]$ ,  $f$  est continue et strictement décroissante.

Comme  $0 \in [f(\frac{7}{6}); f(4)]$ , il existe d'après le théorème des valeurs intermédiaires, un réel unique  $\alpha$  de cet intervalle tel que  $f(\alpha) = 0$ .

- On a  $f(2) \approx 14,26$  et  $f(3) \approx -1,54$ , donc  $2 < \alpha < 3$ ;
  - On a  $f(2,9) \approx 0,26$  et  $f(3,0) \approx -1,54$ , donc  $2,9 < \alpha < 3,0$ ;
  - On a  $f(2,91) \approx 0,09$  et  $f(2,92) \approx -0,09$ , donc  $2,91 < \alpha < 2,92$ ;
  - On a  $f(2,914) \approx 0,0013$  et  $f(2,915) \approx -0,005$ , donc  $2,914 < \alpha < 2,915$ .
3. On a donc  $f(x) \geq 0$  sur  $[1; \alpha]$  et  $f(x) \leq 0$  sur  $[\alpha; 4]$ .

## Partie 2 : Optimisation

$$B(x) = -15x^2 + 15x + 35x \ln x.$$

1. 2 500 litres correspondent à  $x = 2,5$  et  $B(2,5) = -15 \times 2,5^2 + 15 \times 2,5 + 35 \times 2,5 \times \ln 2,5 \approx 23,9254$  soit environ 23 925 €.

2. La fonction  $B$  est dérivable sur  $[1; 4]$  et sur cet intervalle :

$$B'(x) = -30x + 15 + 35 \ln x + 35x \times \frac{1}{x} = 50 - 30x + 35 \ln x = f(x).$$

3. a. D'après la partie 1,  $f(x) = B'(x) \geq 0$  sur  $[1; \alpha]$  : la fonction  $B$  est donc croissante sur  $[1; \alpha]$ .

De même  $f(x) = B'(x) \leq 0$  sur  $[\alpha; 4]$  : la fonction  $B$  est donc décroissante sur  $[\alpha; 4]$ .

Conclusion :  $B(\alpha)$  est le maximum de la fonction  $B$  sur l'intervalle  $[1; 4]$ .

- b.  $B(\alpha) = -15\alpha^2 + 15\alpha + 35\alpha \ln \alpha$ .

En utilisant la valeur approchée de  $\alpha$  trouvée dans la partie 1, on a :

$$B(\alpha) \approx -15 \times 2,914^2 + 15 \times 2,914 + 35 \times 2,914 \times \ln 2,914 \approx 25,4201, \text{ soit environ } 25\,420 \text{ € à l'euro près.}$$

Il faut donc que l'entreprise vende 2 914 litres de jus de fruits pour faire un bénéfice maximal.