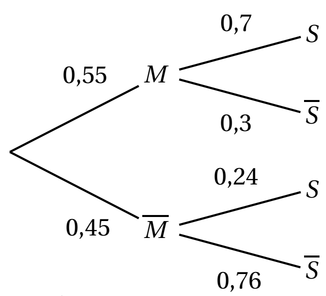
Corrigé du Baccalauréat S Antilles-Guyane 9 septembre 2020

EXERCICE 1 **6 points**

Partie A

1. On traduit cette situation à l'aide de l'arbre pondéré suivant :



2. En utilisant l'arbre pondéré précédent, on obtient :
$P(M \cap S) = 0,55 \times 0,7 \approx 0,385$.
La probabilité que Louise emmène Zoé le matin et qu'elle la ramène le soir est à peu près égale à 0,385.
3. $P(S) = P(M \cap S) + P(M \cap \overline{S}) = 0,385 + 0,45 \times 0,24 \approx 0,493$.
4. Il s'agit de calculer $P_S(M)$.
$P_S(M) = \dfrac{P(M \cap S)}{P(S)} = \dfrac{0,385}{0,493} \approx 0,781$.

Partie B

X qui suit la loi normale d'espérance 28 et d'écart-type 5.

En utilisant la calculatrice, on obtient les résultats suivants :

1. $P(X \leqslant 25) \approx 0,274$.
2. $P(18 \leqslant X \leqslant 38) \approx 0,954$.
3. $P(X \geqslant d) = 0,1$, on obtient $d \approx 34$.
La durée du trajet (arrondie à la minute), telle que $P(X \geqslant d) = 0,1$ est de 34 minutes.
4. Y suit la loi normale d'espérance 26 et d'écart-type σ alors $Z = \dfrac{Y-26}{\sigma}$ suit la loi normale d'espérance 0 et d'écart type 1.
On sait que $P(Y \geqslant 30) = 0,1$.
$P(Y \geqslant 30) = 0,1 \Longleftrightarrow P(Y - 26 \geqslant 30 - 26) = 0,1 \Longleftrightarrow P\left(\dfrac{Y-26}{\sigma} \geqslant \dfrac{4}{\sigma}\right) = 0,1 \Longleftrightarrow P\left(Z \geqslant \dfrac{4}{\sigma}\right) = 0,1$
À l'aide de la calculatrice on trouve $\dfrac{4}{\sigma} \approx 1,281$ d'où $\sigma \approx \dfrac{4}{1,281} \approx 3,12$

Partie C

Ici on interroge $N = 254$ salariés de manière indépendante.
La proportion annoncée des salariés pratiquant le covoiturage est $p = 0,35$.
On a $N \geqslant 30$, $Np = 88,9 \geqslant 5$ et $n(1-p) = 165,1 \geqslant 5$.
On peut donc établir un intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95%.
$I_N = \left[p - 1,96\dfrac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{N}} ; p + 1,96\dfrac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{N}}\right]$.
Or $p - 1,96\dfrac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{N}} \approx 0,291$ et $p + 1,96\dfrac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{N}} \approx 0,409$ donc $I_N = [0,291 ; 0,409]$.
La fréquence observée est $f = \dfrac{82}{254} \approx 0,323 \in I_N$.
Ce sondage ne remet pas en cause l'information publiée par l'entreprise sur son site internet.

EXERCICE 2 **6 points**

Commun à tous les candidats

Partie A

La fonction g est définie sur $[0\,;\,+\infty[$ par $g(x) = 1 - \mathrm{e}^{-x}$.

1. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} -x = -\infty$ donc $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \mathrm{e}^{-x} = 0$ et $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} 1 - \mathrm{e}^{-x} = 1$

2. $g(x) = 1 - \mathrm{e}^{-x}$ donc $g'(x) = \mathrm{e}^{-x}$
Pour tout réel x, $\mathrm{e}^{-x} > 0$ donc $g'(x) > 0$ sur $[0\,;\,+\infty[$.
La fonction g est donc strictement croissante sur $[0\,;\,+\infty[$.

Partie B

1. **a.** $f(x) = (x-1)\mathrm{e}^{-kx} + 1$.

$u(x) = x - 1 \qquad v(x) = \mathrm{e}^{-kx}$
$u'(x) = 1 \qquad v'(x) = -k\mathrm{e}^{-kx}$

$f = uv + 1$ et $(uv)' = u'v + uv'$

$f'(x) = 1 \times \mathrm{e}^{-kx} + (x-1)\times(-k\mathrm{e}^{-kx}) + 0 = \mathrm{e}^{-kx}(1 + (x-1)(-k)) = \mathrm{e}^{-kx}(1 - kx + k) = \mathrm{e}^{-kx}(-kx + k + 1)$

b. La tangente T a pour équation $y = f'(1)(x-1) + f(1)$.
or $f(1) = 1$ et $f'(1) = \mathrm{e}^{-k}$
Donc T a pour équation $y = \mathrm{e}^{-k}(x-1) + 1 = \mathrm{e}^{-k}x - \mathrm{e}^{-k} + 1$
B est le point de T d'abscisse 0, donc $y_B = -\mathrm{e}^{-k} + 1 = g(k)$

2. D'après le tableau de variation de la fonction g de la partie A, pour tout réel positif k, $g(k) \in [0\,;\,1]$.
Le point B ayant pour coordonnées $(0\,;\,g(k))$ avec $0 \leqslant g(k) \leqslant 1$, il appartient bien au segment $[OJ]$.

Partie C

La fonction h est définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = (x-1)\mathrm{e}^{-2x} + 1$.

1. Voir **ANNEXE 1**. Sur l'intervalle $[0;\,1]$: la courbe $\mathscr{C}_h$ est au-dessus de la droite d d'équation $y = x$ donc $h(x) \geqslant x$,
$\mathscr{D}$ est le domaine du plan délimité par la courbe $\mathscr{C}_h$ et la droite d. $\mathscr{A}$ est l'aire de $\mathscr{D}$ exprimée en unité d'aire, donc

$$\mathscr{A} = \int_0^1 (h(x) - x)\,\mathrm{d}x.$$

2. **a.** $h(x) - x = (x-1)\mathrm{e}^{-2x} + 1 - x = -(1-x)\mathrm{e}^{-2x} + (1-x) = (1-x)(-\mathrm{e}^{-2x} + 1) = (1-x)\left(1 - \mathrm{e}^{-2x}\right)$.

b. On admet que, pour tout réel x, $\mathrm{e}^{-2x} \geqslant 1 - 2x$.
$\mathrm{e}^{-2x} \geqslant 1 - 2x \iff -\mathrm{e}^{-2x} \leqslant 2x - 1 \iff 1 - \mathrm{e}^{-2x} \leqslant 1 + 2x - 1 \iff 1 - \mathrm{e}^{-2x} \leqslant 2x$
Sur $[0\,;\,1]$, $x \leqslant 1$ donc $1 - x \geqslant 0$ d'où
$1 - \mathrm{e}^{-2x} \leqslant 2x \iff (1-x)(1 - \mathrm{e}^{-2x}) \leqslant (1-x)2x \iff h(x) - x \leqslant 2x - 2x^2$

c. $h(x) - x \leqslant 2x - 2x^2$ donc $\displaystyle\int_0^1 (h(x) - x)\,\mathrm{d}x. \leqslant \int_0^1 (2x - 2x^2)\,\mathrm{d}x$.

$\displaystyle\int_0^1 (2x - 2x^2)\,\mathrm{d}x = \left[x^2 - \frac{2}{3}x^3\right]_0^1 = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$

on obtient donc $\mathscr{A} \leqslant \dfrac{1}{3}$.

3. $\mathscr{A} = \displaystyle\int_0^1 (h(x) - x)\,\mathrm{d}x = \left[H(x) - \frac{x^2}{2}\right]_0^1 = H(1) - \frac{1}{2} - H(0) = \frac{1}{4}(1-2)\mathrm{e}^{-2} - \frac{1}{2} + 1 - \frac{1}{4}\mathrm{e}^0 = -\frac{1}{4}\mathrm{e}^{-2} - \frac{1}{2} + 1 - \frac{1}{4} = -\frac{1}{4}\mathrm{e}^{-2} + \frac{1}{4}$

Exercice 3 **4 points**

Commun à tous les candidats

On se place dans le repère $\left(A ; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE}\right)$.

1. H(0 ; 1 ; 1) , M(0,5 ; 0 ; 0) et N(1 ; 0,5 ; 0).

2. a. La droite (MN) est définie par le point M et le vecteur $\overrightarrow{MN}$.

M(0,5 ; 0 ; 0) et $\overrightarrow{MN}\begin{pmatrix}0,5\\0,5\\0\end{pmatrix}$

Une représentation paramétrique de la droite (MN) est donc :

$$\left\{\begin{array}{lcl} x &=& 0,5+0,5k\\ y &=& 0,5k\\ z &=& 0\end{array}\right., k \in \mathbb{R}.$$

b. Une représentation paramétrique de la droite (CD) est

$$\left\{\begin{array}{lcl} x &=& t\\ y &=& 1\\ z &=& 0\end{array}\right., t \in \mathbb{R}.$$

K étant le point d'intersection des droites (CD) et (MN), ses coordonnées sont solutions du système suivant :

$$\begin{cases} x=t\\ y=1\\ z=0\\ x=0,5+0,5k\\ y=0,5k\\ z=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1=0,5k\\ t=0,5+0,5k\\ x=t\\ y=1\\ z=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k=2\\ t=1,5\\ x=1,5\\ y=1\\ z=0\end{cases}$$

C'est pourquoi K (1,5 ; 1 ; 0)

3. a. $\overrightarrow{HM}\begin{pmatrix}0,5\\-1\\-1\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{HN}\begin{pmatrix}1\\-0,5\\-1\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{n}\begin{pmatrix}2\\-2\\3\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{HM}$ et $\overrightarrow{HN}$ ne sont pas colinéaires car $\dfrac{1}{0,5} \neq \dfrac{-0,5}{-1}$

$\overrightarrow{n}\cdot\overrightarrow{HM} = 2\times 0,5 - 2\times(-1) + 3\times(-1) = 1+2-3 = 0$

$\overrightarrow{n}\cdot\overrightarrow{HN} = 2\times 1 - 2\times(-0,5) + 3\times(-1) = 2+1-3 = 0$

Le vecteur $\overrightarrow{n}$ est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan (HMN),c'est donc un vecteur normal à ce plan.

b. $\overrightarrow{n}\begin{pmatrix}2\\-2\\3\end{pmatrix}$ étant un vecteur normal du plan (HMN),

une équation cartésienne de ce plan est $2x-2y+3z+d=0$, H(0 ; 1 ; 1) appartient à ce plan donc ses coordonnées vérifient l'équation, on a donc $2\times 0 - 2\times 1 + 3\times 1 + d = 0$ soit $d=-1$

Une équation du plan (HMN) est donc $2x-2y+3z-1=0$

c. Déterminons une représentation paramétrique de la droite (CG). Cette droite est déterminée par le point C(1 ; 1 ; 0) et $\overrightarrow{CG}\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$

Une représentation paramétrique de la droite (MN) est donc :

$$\left\{\begin{array}{lll} x &=& 1\\ y &=& 1\\ z &=& p\end{array}\right., p \in \mathbb{R}.$$

L est le point d'intersection de la droite (CG) et du plan (HMN), ses coordonnées sont donc solutions du système suivant :

$$\begin{cases}2x-2y+3z-1=0\\ x=1\\ y=1\\ z=p\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}2-2+3p-1=0\\ x=1\\ y=1\\ z=p\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}p=\dfrac{1}{3}\\ x=1\\ y=1\\ z=\dfrac{1}{3}\end{cases}$$

C'est pourquoi L $(1~;~1~;~\frac{1}{3})$

4. Sur la face (ABCD), on trace le segment [MN],
sur la face (BCGF), on trace le segment [NL],
sur la face (CDHG), on trace le segment [LH],
Les faces (ABFE) et (CDHG) sont parallèles donc les droites d'intersection des ces deux plans avec le plan (HMN) sont parallèles. On trace la parallèle à (LH) passant par M, elle coupe la droite (AE) en un point S.
Sur la face (ADHE), on trace le segment [SH],(on peut remarquer que (SH) est parallèle à (NL).
La section du cube par le plan (HMN) est donc MNLHS.
Voir ANNEXE 2.

EXERCICE 4 **5 points**

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

1. $u_0 = 4$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = -\frac{2}{3}u_n + 1$ et $v_n = u_n - \frac{2}{3}$.

$u_0 = 4$ $\qquad$ $v_0 = 4 - \frac{2}{3} = \frac{10}{3}$

$u_1 = -\frac{2}{3} \times 4 + 1 = -\frac{8}{3} + 1 = -\frac{5}{3}$ $\qquad$ $v_1 = -\frac{5}{3} - \frac{2}{3} = -\frac{7}{3}$

$u_2 = -\frac{2}{3} \times \left(-\frac{5}{3}\right) + 1 = \frac{10}{9} + 1 = \frac{19}{9}$ $\qquad$ $v_2 = \frac{19}{9} - \frac{2}{3} = \frac{13}{9}$

$\dfrac{v_1}{v_0} = \dfrac{-\frac{7}{3}}{\frac{10}{3}} = -\frac{7}{3} \times \frac{3}{10} = -\frac{7}{10}$ $\qquad$ $\dfrac{v_2}{v_1} = \dfrac{\frac{13}{9}}{-\frac{7}{3}} = -\frac{13}{9} \times \frac{3}{7} = -\frac{13}{21}$

$\dfrac{v_1}{v_0} \neq \dfrac{v_2}{v_1}$, donc (v_n) n'est pas une suite géométrique. L'affirmation 1 est donc fausse.

2. Pour tout entier naturel n non nul, $-1 \leqslant \cos(n) \leqslant 1$
$\Longleftrightarrow 3-1 \leqslant 3+\cos(n) \leqslant 3+1 \Longleftrightarrow 2 \leqslant 3+\cos(n) \leqslant 4$
$\Longleftrightarrow \dfrac{2}{n^2} \leqslant \dfrac{3+\cos(n)}{n^2} \leqslant \dfrac{4}{n^2}$
or $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{2}{n^2} = \lim_{n\to+\infty} \frac{4}{n^2} = 0$,
d'après le théorème des gendarmes $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{3+\cos(n)}{n^2} = 0$, l'affirmation 2 est donc vraie.

3. À la fin de l'exécution, la variable U contient la première valeur strictement supérieur à 5 000.
En effet l'algorithme ne s'arrête pas tant que $U \leqslant 5000$.
En utilisant la calculatrice, on obtient la valeur 6 565.
L'affirmation 3 est donc fausse.

4. $(z-\mathrm{i})\left(z^2+z\sqrt{3}+1\right)=0. \iff (z-\mathrm{i})=0$ ou $\left(z^2+z\sqrt{3}+1\right)=0$

$(z-\mathrm{i})=0 \iff z=\mathrm{i}$

$z^2+z\sqrt{3}+1=0 \qquad \Delta=\sqrt{3}^2-4\times 1=-1=i^2$

Δ est un réel strictement négatif donc l'équation a pour solution deux nombres complexes conjugués :

$z_1=\dfrac{-\sqrt{3}-i}{2}$ et $z_2=\overline{z_1}=\dfrac{-\sqrt{3}+i}{2}$

L'équation $(z-\mathrm{i})\left(z^2+z\sqrt{3}+1\right)=0$ a donc comme ensemble solution : $S=\left\{i, \dfrac{-\sqrt{3}-i}{2}, \dfrac{-\sqrt{3}+i}{2}\right\}$

$|i|=1, \quad \left|\dfrac{-\sqrt{3}-i}{2}\right|=\left|\dfrac{-\sqrt{3}+i}{2}\right|=\dfrac{3+1}{4}=1$. L'affirmation 4 est donc vraie.

5. $z_0=2$ et pour tout entier naturel $z_{n+1}=2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}}z_n$.

$z_{n+1}=2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}}z_n=2\mathrm{i}z_n \qquad z_1=2\mathrm{i}z_0=2\mathrm{i}\times 2=4\mathrm{i} \qquad z_2=2\mathrm{i}z_1=2\mathrm{i}\times 4\mathrm{i}=-8$

Soit K le milieu du segment $[M_0M_2]$, $z_K=\dfrac{z_0+z_2}{2}=\dfrac{2-8}{2}=-3$.

le point O n'est donc pas le milieu du segment $[M_0M_2]$, l'affirmation 5 est fausse.

EXERCICE 4 — 5 points

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

On considère l'équation (E) $x^2-5y^2=1$ où x et y sont des entiers naturels.

Partie A

1. Si x et y sont deux entiers naturels pairs, il existe deux entiers naturels p et q tels que $x=2p$ et $y=2q$.

$(x\,;y)$ est un couple solution de l'équation (E)$\iff x^2-5y^2=1$

$\iff (2p)^2-5(2q)^2=1 \iff 4p^2-5\times 4q^2=1 \iff 4\left(p^2-5q^2\right)=1$

On en déduit 4 est un diviseur de 1, ce qui est impossible. Donc x et y ne peuvent pas être tous les deux pairs.

Si x et y sont deux entiers naturels impairs, il existe deux entiers naturels p et q tels que $x=2p+1$ et $y=2q+1$.

$(x\,;y)$ est un couple solution de l'équation (E)$\iff x^2-5y^2=1$

$\iff (2p+1)^2-5(2q+1)^2=1 \iff 4p^2+4p+1-5(4q^2+4q+1)=1$

$\iff 4p^2+4p+1-20q^2-20q-5=1 \iff 4p^2+4p-20q^2-20q-4=1$

$\iff 4\left(p^2+p-5q^2-5q-1\right)=1$

On en déduit que 4 est un diviseur de 1, ce qui est impossible. Donc x et y ne peuvent pas être tous les deux impairs.

En conclusion, x et y ne peuvent pas avoir la même parité.

2. Soit d un diviseur commun à x et y, il existe deux entiers naturels X et Y tels que $x=dX$ et $y=dY$.

$(x\,;y)$ est un couple solution de l'équation (E)$\iff x^2-5y^2=1$

$\iff (dX)^2-5(dY)^2=1 \iff d^2X^2-5(d^2Y^2)=1$

$\iff d^2\left(X^2-5Y^2\right)=1$

On en déduit que d^2 est un diviseur de 1, donc $d=1$.

Le seul diviseur commun à x et y est 1, x et y sont donc premiers entre eux.

3. Soit k un entier naturel.

Reste de la division euclidienne de k par 5	0	1	2	3	4
Reste de la division euclidienne de k^2 par 5	0	1	4	4	1

4. $(x\,;y)$ est un couple solution de l'équation (E) donc $x^2 = 1+5y^2$
On en déduit que $x^2 \equiv 1\,[5]$, d'après le tableau précédent on a alors $x \equiv 1\,[5]$ ou $x \equiv 4\,[5]$.

Partie B

1. $\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 20 \\ 4 & 9 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$ d'où $\left\{\begin{array}{lll} x_{n+1} & = & 9x_n+20y_n \\ y_{n+1} & = & 4x_n+9y_n \end{array}\right.$

2. Démontrons par récurrence que, pour tout entier naturel n, $(x_n,\ y_n)$ est solution de l'équation (E).
   - **Initialisation** : $x_0 = 1$ et $y_0 = 0$ donc $x_0^2 - 5y_0^2 = 1$
     La propriété est vraie au rang 0.
   - **Hérédité** : Supposons la propriété vraie au rang n, c'est-à-dire $x_n^2 - 5y_n^2 = 1$ et démontrons qu'alors elle est vraie au rang $(n+1)$, c'est à dire $x_{n+1}^2 - 5y_{n+1}^2 = 1$

     $(x_{n+1})^2 - 5(y_{n+1})^2 = (9x_n+20y_n)^2 - 5(4x_n+9y_n)^2$

     $= 81x_n^2 + 360x_ny_n + 400y_n^2 - 5(16x_n^2 + 72x_ny_n + 81y_n^2)$

     $= 81x_n^2 + 360x_ny_n + 400y_n^2 - 80x_n^2 - 360x_ny_n - 405y_n^2 = x_n^2 - 5y_n^2 = 1$

     Donc la propriété est vraie au rang $(n+1)$; elle est héréditaire.
   - **Conclusion** : la propriété est vraie au rang 0 et est héréditaire, donc, par application du principe de récurrence, elle est vraie pour tout entier naturel n.

3. **a.** $A^2 = \begin{pmatrix} 9 & 20 \\ 4 & 9 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 9 & 20 \\ 4 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 81+80 & 180+180 \\ 36+36 & 80+81 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 161 & 360 \\ 72 & 161 \end{pmatrix}$.

   $\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = A^2\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 161 & 360 \\ 72 & 161 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

   d'où $\left\{\begin{array}{lll} x_2 & = & 161 \\ y_2 & = & 72 \end{array}\right.$

   b. Soit p un entier naturel.

   $\begin{pmatrix} x_{p+2} \\ y_{p+2} \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} x_{p+1} \\ y_{p+1} \end{pmatrix} = A^2\begin{pmatrix} x_p \\ y_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 161 & 360 \\ 72 & 161 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_p \\ y_p \end{pmatrix}$

   d'où $y_{p+2} = 72x_p + 161y_p$

   Si y_p est multiple de 9, il existe un entier naturel k tel que $y_p = 9k$

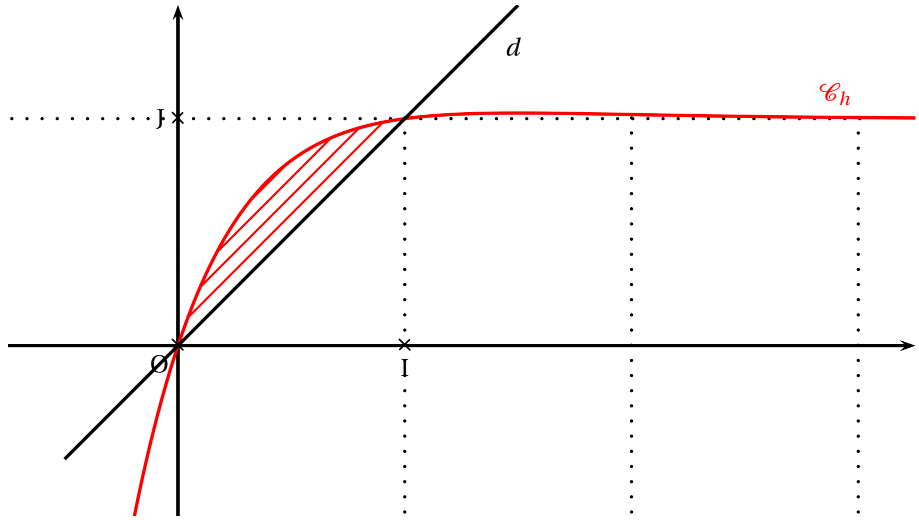
   d'où $y_{p+2} = 72x_p + 161 \times 9k = 9(8x_p + 161k)$, donc$x_{p+2}$ est bien multiple de 9.

   c. Démontrons par récurrence que, pour tout entier naturel n, y_{2n} est un multiple de 9.
   - **Initialisation** : $y_0 = 0$ est bien multiple de 9.
     La propriété est vraie au rang 0.
   - **Hérédité** : Supposons la propriété vraie au rang n, et démontrons qu'alors elle est vraie au rang $(n+1)$.
     $y_{2(n+1)} = y_{2n+2}$,d'après la question précédente, puisque y_{2n} est multiple de 9, alors y_{2n+2} est également multiple de 9.

     Donc la propriété est vraie au rang $(n+1)$; elle est héréditaire.
   - **Conclusion** : la propriété est vraie au rang 0 et est héréditaire, donc, par application du principe de récurrence, elle est vraie pour tout entier naturel n.

   $y_{2020} = y_{(2\times1010)}$ est donc un multiple de 9.

ANNEXE 1 (exercice 2, partie C)



ANNEXE 2 (exercice 3)