

Corrigé du baccalauréat S – Nouvelle Calédonie 2 décembre 2020

Exercice 1

5 points

Commun à tous les candidats

1. On considère l'équation (E) : $z^3 = 4z^2 - 8z + 8$ ayant pour inconnue le nombre complexe z .

a. $(z-2)(z^2 - 2z + 4) = z^3 - 2z^2 + 4z - 2z^2 + 4z - 8 = z^3 - 4z^2 + 8z - 8$

b. $(E) \iff z^3 - 4z^2 + 8z - 8 = 0 \iff (z-2)(z^2 - 2z + 4) = 0 \iff z-2 = 0$ ou $z^2 - 2z + 4 = 0$

- $z-2 = 0 \iff z = 2$

- On résout $z^2 - 2z + 4 = 0$; $\Delta = (-2)^2 - 4 \times 1 \times 4 = -12 = -(2\sqrt{3})^2$

L'équation admet deux solutions conjuguées :

$$z_1 = \frac{2 + i \times 2\sqrt{3}}{2} = 1 + i\sqrt{3} \text{ et } z_2 = 1 - i\sqrt{3}.$$

L'ensemble solution de l'équation (E) est : $\{2; 1 + i\sqrt{3}; 1 - i\sqrt{3}\}$.

c. On écrit les solutions de l'équation (E) sous forme exponentielle :

- $2 = 2e^0$

- $1 + i\sqrt{3} = 2 \left(\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = 2 \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right) = 2e^{i\frac{\pi}{3}}$

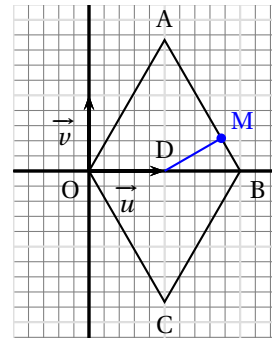
- $1 - i\sqrt{3}$ est le conjugué de $1 + i\sqrt{3}$ donc $1 - i\sqrt{3} = 2e^{-i\frac{\pi}{3}}$

On munit le plan complexe d'un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$.

Soit A, B, C et D les quatre points d'affixes respectives

$$z_A = 1 + i\sqrt{3} \quad z_B = 2 \quad z_C = 1 - i\sqrt{3} \quad z_D = 1.$$

Ces quatre points sont représentés dans la figure ci-contre.



2. • Le milieu de [OB] a pour affixe $\frac{z_O + z_B}{2} = \frac{0 + 2}{2} = 1 = z_D$.

Le milieu de [AC] a pour affixe $\frac{z_A + z_C}{2} = \frac{1 + i\sqrt{3} + 1 - i\sqrt{3}}{2} = 1 = z_D$.

- Les segments [OB] et [AC] ont le même milieu D donc OACB est un parallélogramme.

- $OA = |z_A| = |1 + i\sqrt{3}| = \left| 2e^{i\frac{\pi}{3}} \right| = 2$

- $OC = |z_C| = |1 - i\sqrt{3}| = \left| 2e^{-i\frac{\pi}{3}} \right| = 2$

Le parallélogramme OACB a deux côtés consécutifs de même longueur donc OACB est un losange.

3. Soit M le point d'affixe $z_M = \frac{7}{4} + i\frac{\sqrt{3}}{4}$.

a. Pour démontrer que les points A, M et B sont alignés, on va utiliser les vecteurs \vec{AM} et \vec{AB} :

- \overrightarrow{AM} a pour affixe $z_{\overrightarrow{AM}} = \frac{7}{4} + i\frac{\sqrt{3}}{4} - 1 - i\sqrt{3} = \frac{3}{4} - i\frac{3\sqrt{3}}{4}$.
- \overrightarrow{AB} a pour affixe $z_{\overrightarrow{AB}} = 2 - 1 - i\sqrt{3} = 1 - i\sqrt{3}$.
- $\overrightarrow{AM} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AB}$ donc les vecteurs \overrightarrow{AM} et \overrightarrow{AB} sont colinéaires.

Les vecteurs \overrightarrow{AM} et \overrightarrow{AB} sont colinéaires donc les points A, M et B sont alignés.

- b.
- Le vecteur \overrightarrow{AB} a pour affixe $1 - i\sqrt{3}$ donc il a pour coordonnées $(1; -\sqrt{3})$.
 - Le vecteur \overrightarrow{DM} a pour affixe $\frac{7}{4} + i\frac{\sqrt{3}}{4} - 1 = \frac{3}{4} + i\frac{\sqrt{3}}{4}$ donc il a pour coordonnées $\left(\frac{3}{4}; \frac{\sqrt{3}}{4}\right)$.
 - $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{DM} = 1 \times \frac{3}{4} + (-\sqrt{3}) \times \frac{\sqrt{3}}{4} = 0$ donc $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{DM}$.

On en déduit que le triangle DMB est rectangle en M.

Exercice 2

5 points

Commun à tous les candidats

Le phaéton à bec rouge est un oiseau des régions intertropicales.

1. Lorsque le phaéton à bec rouge vit dans un environnement pollué, sa durée de vie, en année, est modélisée par une variable aléatoire X suivant une loi normale d'espérance μ inconnue et d'écart-type $\sigma = 0,95$.

- a. On considère la variable aléatoire Y définie par $Y = \frac{X - \mu}{0,95}$.

D'après le cours, on peut dire que la variable aléatoire Y suit la loi normale centrée réduite.

- b. On sait que $P(X \geq 4) = 0,146$ donc $P(X \leq 4) = 1 - 0,146 = 0,854$.

$$X \leq 4 \iff X - \mu \leq 4 - \mu \iff \frac{X - \mu}{0,95} \leq \frac{4 - \mu}{0,95} \iff Y \leq \frac{4 - \mu}{0,95}$$

$$\text{Donc } P(X \leq 4) = 0,854 \text{ équivaut à } P\left(Y \leq \frac{4 - \mu}{0,95}\right) = 0,854.$$

On sait que Y suit la loi normale centrée réduite, donc on peut déterminer à la calculatrice le nombre a tel que $P(Y \leq a) = 0,854$; on trouve $a \approx 1,0537$.

$$\text{Donc } \mu \text{ vérifie } \frac{4 - \mu}{0,95} \approx 1,0537, \text{ c'est-à-dire } \mu \approx 4 - 0,95 \times 1,0537 \text{ ce qui donne } \mu \approx 3.$$

2. Lorsque le phaéton à bec rouge vit dans un environnement sain, sa durée de vie, en année, est modélisée par une variable aléatoire Z .

Les courbes des fonctions de densité associées aux lois de X et de Z sont représentées sur l'ANNEXE à rendre avec la copie.

- a. La variable aléatoire X suit une loi normale de moyenne $\mu = 3$; donc la courbe de la fonction de densité associée à X est symétrique par rapport à la droite verticale d'équation $x = 3$. C'est donc la courbe \mathcal{C}_2 .

- b. Sur l'ANNEXE, on hachure la zone du plan correspondant à $P(Z \geq 4)$.

On admettra par la suite que $P(Z \geq 4) = 0,677$.

3. Une étude statistique portant sur une région donnée, a permis d'établir que 30 % des phaétons à bec rouge vivent dans un environnement pollué; les autres vivent dans un environnement sain. On choisit au hasard un phaéton à bec rouge vivant dans la région donnée.

On considère les évènements suivants :

- S : « le phaéton à bec rouge choisi vit dans un environnement sain »;
- V : « le phaéton à bec rouge choisi a une durée de vie d'au moins 4 ans ».

- a. On complète l'arbre pondéré illustrant la situation sur l'ANNEXE.
- b. D'après la formule des probabilités totales :

$$P(V) = P(S \cap V) + P(\bar{S} \cap V) = 0,7 \times 0,677 + 0,3 \times 0,146 = 0,5177 \approx 0,518$$
- c. Sachant que le phaéton à bec rouge a une durée de vie d'au moins 4 ans la probabilité qu'il vive dans un environnement sain est :

$$P_V(S) = \frac{P(V \cap S)}{P(V)} = \frac{0,7 \times 0,677}{0,5177} \approx 0,915$$

Exercice 3

5 points

Commun à tous les candidats

Partie A

Soit g la fonction définie sur \mathbf{R} , par $g(x) = x^2 + x + \frac{1}{4} + \frac{4}{(1 + e^x)^2}$.

On admet que la fonction g est dérivable sur \mathbf{R} et on note g' sa fonction dérivée.

1. On détermine les limites de g en $+\infty$ et en $-\infty$.

- Limite en $+\infty$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 + x + \frac{1}{4} = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty \implies \lim_{x \rightarrow +\infty} (1 + e^x)^2 = +\infty \implies \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4}{(1 + e^x)^2} = 0$$

Donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 + x + \frac{1}{4} + \frac{4}{(1 + e^x)^2} = +\infty$, c'est-à-dire $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$.

- Limite en $-\infty$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 + x + \frac{1}{4} = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0 \implies \lim_{x \rightarrow -\infty} (1 + e^x)^2 = 1 \implies \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4}{(1 + e^x)^2} = 4$$

Donc $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 + x + \frac{1}{4} + \frac{4}{(1 + e^x)^2} = +\infty$, c'est-à-dire $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = +\infty$.

2. On admet que la fonction g' est strictement croissante sur \mathbf{R} et que $g'(0) = 0$.

- Pour $x < 0$, comme la fonction g' est strictement croissante, on a $g'(x) < g'(0)$; on sait que $g'(0) = 0$ donc, pour tout $x < 0$, on a $g'(x) < 0$.
- Pour $x > 0$, comme la fonction g' est strictement croissante, on a $g'(x) > g'(0)$; on sait que $g'(0) = 0$ donc, pour tout $x > 0$, on a $g'(x) > 0$.

3. La fonction g' s'annule et change de signe pour $x = 0$; elle passe de négative à positive, donc la fonction g admet un minimum en $x = 0$ qui vaut $g(0) = \frac{1}{4} + \frac{4}{(1+1)^2} = \frac{5}{4}$.

On dresse le tableau des variations de la fonction g :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$g'(x)$	$-$	0	$+$
g	$+\infty$	$\frac{5}{4}$	$+\infty$

Partie B

Soit f la fonction définie sur \mathbf{R} par : $f(x) = 3 - \frac{2}{1 + e^x}$.

On désigne par \mathcal{C}_f la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$, représentée dans la **figure** ci-dessous.

Soit A le point de coordonnées $\left(-\frac{1}{2}; 3\right)$.

1. $f(0) = 3 - \frac{2}{1 + e^0} = 3 - \frac{2}{2} = 2$ donc le point B(0; 2) appartient à \mathcal{C}_f .

2. Soit x un réel quelconque.

On note M le point de la courbe \mathcal{C}_f de coordonnées $(x; f(x))$.

$$\begin{aligned} AM^2 &= (x_M - x_A)^2 + (y_M - y_A)^2 = \left(x - \left(-\frac{1}{2}\right)\right)^2 + (f(x) - 3)^2 = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(3 - \frac{2}{1 + e^x} - 3\right)^2 \\ &= x^2 + x + \frac{1}{4} + \left(-\frac{2}{1 + e^x}\right)^2 = x^2 + x + \frac{1}{4} + \frac{4}{(1 + e^x)^2} = g(x) \end{aligned}$$

3. On admet que la distance AM est minimale si et seulement si AM^2 est minimal.

$AM^2 = g(x)$ et $g(x)$ est minimale pour $x = 0$; AM est minimale pour $x = 0$ donc si M a pour abscisse 0, c'est-à-dire est en B.

4. On admet que la fonction f est dérivable sur \mathbf{R} et on note f' sa fonction dérivée.

a. Pour tout réel x , $f'(x) = 0 - \frac{0 - 2e^x}{(1 + e^x)^2} = \frac{2e^x}{(1 + e^x)^2}$

b. Soit T la tangente à la courbe \mathcal{C}_f au point B.

L'équation réduite de T est : $y = f'(0)(x - 0) + f(0)$.

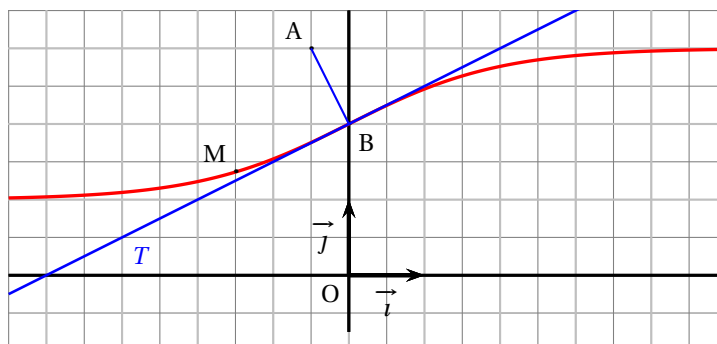
- $f'(x) = \frac{2e^x}{(1 + e^x)^2}$ donc $f'(0) = \frac{2 \times 1}{(1 + 1)^2} = \frac{1}{2}$
- $f(0) = y_B = 2$

Donc l'équation réduite de T est $y = \frac{x}{2} + 2$.

5. La droite T a pour équation $y = \frac{x}{2} + 2$ soit $\frac{x}{2} - y + 2 = 0$; elle a donc pour vecteur normal $\vec{n} \left(\frac{1}{2}; -1\right)$.

Le vecteur \overrightarrow{AB} a pour coordonnées $\left(0 - \left(-\frac{1}{2}\right); 2 - 3\right)$ soit $\left(\frac{1}{2}; -1\right)$; il est donc normal à la droite T .

On en déduit que la droite T est perpendiculaire à la droite (AB).



Exercice 4**5 points****Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité****1. Affirmation 1** : L'équation $(3 \ln x - 5)(e^x + 4) = 0$ admet exactement deux solutions réelles.

$$(3 \ln x - 5)(e^x + 4) = 0 \iff 3 \ln x - 5 = 0 \text{ ou } e^x + 4 = 0$$

- $3 \ln x - 5 = 0 \iff \ln x = \frac{5}{3} \iff x = e^{\frac{5}{3}}$; une solution réelle.
- $e^x + 4 = 0$ n'a pas de solution réelle car $e^x > 0 \Rightarrow e^x + 4 > 0$ pour tout x .

L'équation n'a donc qu'une solution réelle.

Affirmation 1 fausse**2.** On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 2$ et, pour tout n , $u_{n+1} = 2u_n - 5n + 6$.**Affirmation 2** : Pour tout entier naturel n , $u_n = 3 \times 2^n + 5n - 1$.En calculant quelques termes de la suite, 2, 10, 21, 38, 67, 120, on peut conjecturer que la propriété $u_n = 3 \times 2^n + 5n - 1$ est vraie, pour tout n .

On va démontrer cette propriété par récurrence.

• InitialisationPour $n = 0$, on a $u_0 = 2$ et $3 \times 2^0 + 5n - 1 = 3 \times 1 + 0 - 1 = 2$.Donc la propriété est vraie pour $n = 0$.**• Hérédité**On suppose la propriété vraie au rang $n \geq 0$; c'est-à-dire : $u_n = 3 \times 2^n + 5n - 1$.On veut démontrer que $u_{n+1} = 3 \times 2^{n+1} + 5(n+1) - 1$.

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= 2u_n - 5n + 6 = 2(3 \times 2^n + 5n - 1) - 5n + 6 = 3 \times 2^{n+1} + 10n - 2 - 5n + 6 \\ &= 3 \times 2^{n+1} + 5n + 4 = 3 \times 2^{n+1} + 5(n+1) - 1 \end{aligned}$$

Donc la propriété est vraie au rang $n+1$.**• Conclusion**La propriété est vraie au rang 0 et elle est héréditaire pour tout $n \geq 0$; d'après le principe de récurrence, la propriété est vraie pour tout $n \geq 0$.**Affirmation 2 vraie****3.** On considère la suite (u_n) définie, pour tout entier naturel n , par $u_n = n^2 + \frac{1}{2}$.**Affirmation 3** : La suite (u_n) est géométrique.On calcule quelques termes de la suite (u_n) .

$$u_0 = 0 + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}; u_1 = 1^2 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}; u_2 = 2^2 + \frac{1}{2} = \frac{9}{2}; u_3 = 3^2 + \frac{1}{2} = \frac{19}{2}$$

$$\frac{u_3}{u_2} = \frac{\frac{19}{2}}{\frac{9}{2}} = \frac{19}{9}; \frac{u_2}{u_1} = \frac{\frac{9}{2}}{\frac{3}{2}} = \frac{9}{3} = 3$$

 $\frac{19}{9} \neq 3$ donc la suite (u_n) n'est pas géométrique.**Affirmation 3 fausse****4.** Dans un repère de l'espace, soit d la droite passant par le point $A(-3; 7; -12)$ et de vecteur directeur $\vec{u}(1; -2; 5)$.Soit d' la droite ayant pour représentation paramétrique
$$\begin{cases} x = 2t - 1 \\ y = -4t + 3 \\ z = 10t - 2 \end{cases}, t \in \mathbf{R}$$
Affirmation 4 : Les droites d et d' sont confondues.

Les droites sont confondues si elles ont des vecteurs directeurs colinéaires et si elle ont un point en commun.

- La droite d' a pour vecteur directeur $(2; -4; 10)$ qui est égal à $2 \cdot \vec{u}$; les droites d et d' sont donc parallèles.

- On regarde si le point A appartient à la droite d' , autrement dit s'il existe un réel

$$t \text{ tel que : } \begin{cases} -3 = 2t - 1 \\ 7 = -4t + 3 \\ -12 = 10t - 2 \end{cases}$$

La valeur $t = -1$ convient donc $A \in d'$.

Les deux droites d et d' sont confondues.

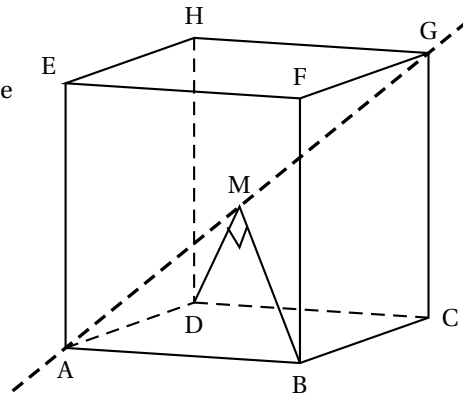
Affirmation 4 vraie

5. On considère un cube ABCDEFGH, l'espace est muni du repère orthonormé $(A; \vec{AB}, \vec{AD}, \vec{AE})$

Une représentation paramétrique de la droite (AG) est

$$\begin{cases} x = t \\ y = t \\ z = t \end{cases} \quad t \in \mathbf{R}.$$

On considère un point M de la droite (AG).



Affirmation 5 : Il y a exactement deux positions du point M sur la droite (AG) telles que les droites (MB) et (MD) soient orthogonales.

On cherche le point M de (AG) tel que $\vec{MB} \perp \vec{MD}$, c'est-à-dire tel que $\vec{MB} \cdot \vec{MD} = 0$.

- $M \in (AG)$ donc les coordonnées de M sont de la forme $(t; t; t)$.
- B a pour coordonnées $(1; 0; 0)$ donc \vec{MB} a pour coordonnées $(1-t; -t; -t)$.
- D a pour coordonnées $(0; 1; 0)$ donc \vec{MD} a pour coordonnées $(-t; 1-t; -t)$.
- $\vec{MB} \cdot \vec{MD} = -t(1-t) + (1-t)(-t) + (-t)(-t) = -t + t^2 - t + t^2 + t^2 = 3t^2 - 2t = t(3t-2)$
- $\vec{MB} \cdot \vec{MD} = 0 \iff t(3t-2) = 0 \iff t = 0$ ou $t = \frac{2}{3}$

Il y a exactement deux positions du point M sur la droite (AG) telles que les droites (MB) et (MD) soient orthogonales; soit M est en A (pour $t = 0$), soit M a pour coordonnées $(\frac{2}{3}; \frac{2}{3}; \frac{2}{3})$.

Affirmation 5 vraie

Exercice 4

5 points

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

1. **Affirmation 1 :** Les solutions de l'équation $7x - 12y = 5$, où x et y sont des entiers relatifs, sont les couples $(-1 + 12k; -1 + 7k)$ où k décrit l'ensemble des entiers relatifs.

Les nombres 7 et 12 sont premiers entre eux donc, d'après le théorème de BÉZOUT, l'équation $7x - 12y = 1$ admet des solutions donc l'équation $7x - 12y = 5$ aussi.

On appelle (E) l'équation $7x - 12y = 5$.

- Pour tout entier relatif k , si $x = -1 + 12k$ et $y = -1 + 7k$, alors
 $7x - 12y = 7(-1 + 12k) - 12(-1 + 7k) = -7 + 84k + 12 - 84k = 5$; donc le couple $(-1 + 12k; -1 + 7k)$ est solution de l'équation (E).
- On suppose maintenant que le couple $(x; y)$ est solution de (E). On sait aussi que $(-1; -1)$ est solution de (E). On a donc :

$$\begin{array}{rcl} 7x & - & 12y & = & 5 \\ 7(-1) & - & 12(-1) & = & 5 \\ \hline 7(x+1) & - & 12(y+1) & = & 0 \end{array} \quad \text{par soustraction membre à membre}$$

Donc $7(x+1) - 12(y+1) = 0$ ce qui équivaut à $7(x+1) = 12(y+1)$.

$7(x+1) = 12(y+1)$ donc 7 divise $12(y+1)$; or 7 et 12 sont premiers entre eux, donc, d'après le théorème de GAUSS, 7 divise $y+1$. On peut donc écrire $y+1$ sous la forme $7k$ donc $y = -1 + 7k$.

$7(x+1) = 12(y+1)$ et $y+1 = 7k$ donc $7(x+1) = 12 \times 7k$ donc $x+1 = 12k$ ce qui veut dire que $x = -1 + 12k$.

Donc les solutions de l'équation $7x - 12y = 5$, où x et y sont des entiers relatifs, sont les couples $(-1 + 12k; -1 + 7k)$ où k décrit l'ensemble des entiers relatifs.

Affirmation 1 vraie

2. **Affirmation 2** : Pour tout entier naturel n , le reste de la division euclidienne de $4 + 3 \times 15^n$ par 3 est égal à 1.

$3 \equiv 0 \pmod{3}$ donc, pour tout n , on a $3 \times 15^n \equiv 0 \pmod{3}$.

On en déduit que $4 + 3 \times 15^n \equiv 4 \pmod{3}$; or $4 \equiv 1 \pmod{3}$ donc $4 + 3 \times 15^n \equiv 1 \pmod{3}$.

Comme $0 \leq 1 < 3$, on peut dire que pour tout n , le nombre 1 est le reste de la division de $4 + 3 \times 15^n$ par 3.

Affirmation 2 vraie

3. **Affirmation 3** : L'équation $n(2n^2 - 3n + 5) = 3$, où n est un entier naturel, admet au moins une solution.

On a $n(2n^2 - 3n + 5) = 3$, où n entier naturel; donc n divise 3, donc $n = 1$ ou $n = 3$.

- Si $n = 1$, on a $n(2n^2 - 3n + 5) = 1(2 - 3 + 5) = 4 \neq 3$.
- Si $n = 3$, on a $n(2n^2 - 3n + 5) = 3(18 - 9 + 5) = 42 \neq 3$.

L'équation n'a pas de solution.

Affirmation 3 fausse

4. Soit t un nombre réel. On pose $A = \begin{pmatrix} t & 3 \\ 2t & -t \end{pmatrix}$.

Affirmation 4 : Il n'existe aucune valeur du réel t pour laquelle $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

$$A^2 = \begin{pmatrix} t & 3 \\ 2t & -t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t & 3 \\ 2t & -t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t^2 + 6t & 3t - 3t \\ 2t^2 - 2t^2 & 6t + t^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t^2 + 6t & 0 \\ 0 & t^2 + 6t \end{pmatrix}$$

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \iff t^2 + 6t = 1$$

$t^2 + 6t = 1 \iff t^2 + 6t - 1 = 0$; $\Delta = 6^2 - 4 \times 1 \times (-1) = 40 > 0$ donc l'équation admet deux solutions distinctes; il y a donc deux valeurs de t pour lesquelles $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Ce sont $-3 + \sqrt{10}$ et $-3 - \sqrt{10}$.

Affirmation 4 fausse

5. On considère les matrices $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ et $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Affirmation 5 : Pour tout entier $n \geq 2$, $A^n = (2^n - 1)A + (2 - 2^n)I_3$.

On va démontrer par récurrence que la propriété $A^n = (2^n - 1)A + (2 - 2^n)I_3$ est vraie pour tout $n \geq 2$.

• **Initialisation**

$$\text{Pour } n = 2, A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 3 & -3 \\ -3 & 4 & -3 \\ 3 & -3 & 4 \end{pmatrix}$$

$(2^n - 1)A + (2 - 2^n)I_3$ devient

$$3A - 2I_3 = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -3 \\ -3 & 6 & -3 \\ 3 & -3 & 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 3 & -3 \\ -3 & 4 & -3 \\ 3 & -3 & 4 \end{pmatrix} = A^2$$

La propriété est donc vérifiée pour $n = 2$.

• **Hérédité**

On suppose la propriété vraie pour le rang $n \geq 2$ et on va démontrer qu'elle est vraie pour le rang $n + 1$.

Autrement dit, on suppose $A^n = (2^n - 1)A + (2 - 2^n)I_3$ et on veut démontrer $A^{n+1} = (2^{n+1} - 1)A + (2 - 2^{n+1})I_3$.

$$\begin{aligned} A^{n+1} &= A^n \times A = ((2^n - 1)A + (2 - 2^n)I_3) \times A = (2^n - 1)A^2 + (2 - 2^n)A \\ &= (2^n - 1)(3A - 2I_3) + 2A - 2^n A = 3 \times 2^n A - 3A - 2^n \times 2I_3 + 2I_3 + 2A - 2^n A \\ &= 2 \times 2^n A - A + 2I_3 - 2^{n+1}I_3 = 2^{n+1}A - A + 2I_3 - 2^{n+1}I_3 \\ &= (2^{n+1} - 1)A + (2 - 2^{n+1})I_3 \end{aligned}$$

La propriété est donc vraie au rang $n + 1$.

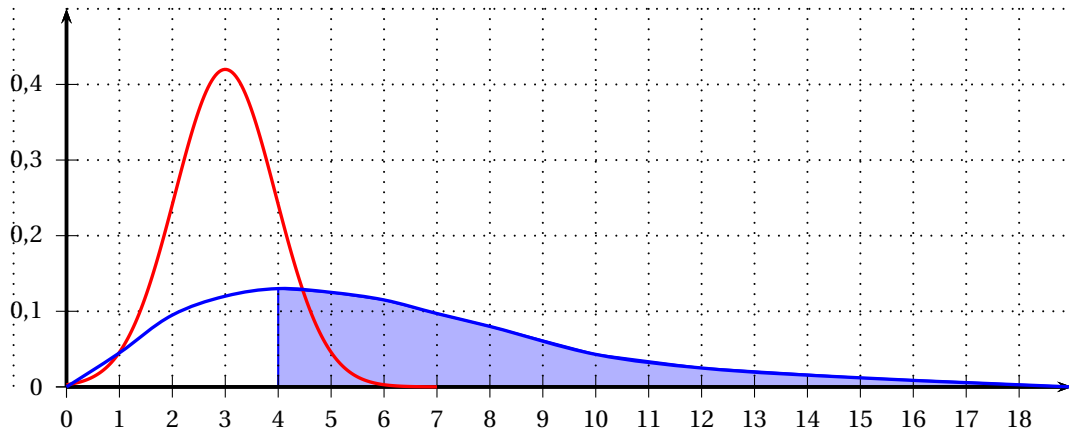
• **Conclusion**

La propriété est vraie au rang 2 et elle est héréditaire pour tout $n \geq 2$; d'après le principe de récurrence, la propriété est vraie pour tout $n \geq 2$.

Affirmation 5 vraie

ANNEXE À RENDRE AVEC LA COPIE

Exercice 2 – question 2



Exercice 2 – question 3

