

Durée : 4 heures

Corrigé du baccalauréat S Polynésie 19 juin 2019

Exercice 1

5 points

Commun à tous les candidats

Les probabilités demandées seront arrondies à 0,01.

1. a. On sait que $E(X) = \frac{1}{\lambda} = 10 \iff \lambda = \frac{1}{10} = 0,1$.
- b. On a $P(X \leq 6) = 1 - e^{-0,1 \times 6} \approx 0,451$ soit 0,45 au centième près. Donc $P(X \geq 6) \approx 1 - 0,45$ soit 0,55.
- c. La loi est sans vieillissement donc :
 $P_{X \geq 6}(X \geq 12) = P_{X \geq 6}(X \geq 6 + 6) = P(X \geq 6) \approx 0,55$ (question précédente).
- d. t vérifie l'équation :
 $P(X > t) = 0,05 \iff e^{-0,1t} = 0,05 \iff$ (par croissance de la fonction logarithme népérien)
 $-0,1t = \ln 0,05 \iff t = -10 \times \frac{\ln 0,05}{\approx} 29,95$, soit 30 mois environ.
2. a. On a $P(55 \leq M \leq 65) = P(\mu - 2\sigma \leq M \leq \mu + 2\sigma) \approx 0,95$ (résultat connu sur la loi normale).
- b. Il faut trouver m tel que $P(M \geq m) \geq 0,99 \iff P(M \leq m) \leq 0,01$.
 La calculatrice (grâce à la fonction inverse loi normale) fournit $m \approx 54$.
3. Le commerçant fait l'hypothèse que la proportion d'acheteurs de glace à la vanille sera $p = \frac{2}{3}$ et il utilise un échantillon de taille $n = 120$.

Les conditions :

- $n = 120 \geq 5$;
- $np = 120 \times \frac{2}{3} = 80 \geq 5$;
- $nn(1-p) = 120 \times \frac{1}{3} = 40 \geq 5$

permettent l'établissement d'un intervalle de fluctuation :

$$I = \left[p - 1,96 \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} ; p + 1,96 \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} \right] = \left[\frac{2}{3} - 1,96 \sqrt{\frac{\frac{2}{3} \times \frac{1}{3}}{120}} ; \frac{2}{3} + 1,96 \sqrt{\frac{\frac{2}{3} \times \frac{1}{3}}{120}} \right] =$$

$$\left[\frac{2}{3} - 1,96 \sqrt{\frac{\frac{2}{3} \times \frac{1}{3}}{120}} ; \frac{2}{3} + 1,96 \sqrt{\frac{\frac{2}{3} \times \frac{1}{3}}{120}} \right].$$

On obtient $I \approx [0,58 ; 0,76]$.Or la fréquence observée sur l'échantillon est $f = \frac{65}{120} \approx 0,54$.Comme $0,54 \notin I$, avec un risque d'erreur de 5 %, l'hypothèse du commerçant doit être remise en cause.

Exercice 2

5 points

Commun à tous les candidats

Partie A

$$(H) : f(1) = 0 \quad f'(1) = 0,25 \quad \text{et} \quad \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f(x) = -\infty.$$

1. Si $f(x) = ax^2 + bx + c$, avec a, b, c réels, on a $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f(x) = c$ ce qui contredit la troisième condition : f n'est donc pas un trinôme du second degré.

2. Soit g la fonction définie sur l'intervalle $]0; 1]$ par $g(x) = k \ln x$.

a. Avec $g'(x) = \frac{k}{x}$ sur $]0; 1]$ on a

$$\begin{cases} g(1) = 0 \\ g'(1) = 0,25 \\ \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} g(x) = -\infty \end{cases} \iff \begin{cases} k \ln 1 = 0 \\ \frac{k}{1} = 0,25 \\ \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{k}{x} = -\infty \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 = 0 \\ k = 0,25 \\ \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} 0,25 \ln x = -\infty \end{cases}$$

Les trois conditions sont remplies par la fonction g définie sur $]0; 1]$ par $g(x) = 0,25 \ln x$.

b. On a $g(0,5) = 0,25 \ln 0,5 \approx -0,17$ et sur C le point d'abscisse $0,5$ a pour ordonnée $-0,75$ environ. Donc la courbe représentative de la fonction g ne coïncide pas avec la courbe C .

Avec $h'(x) = -\frac{4a}{x^5} + b$, on a

$$\begin{cases} h(1) = 0 \\ h'(1) = 0,25 \\ \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} h(x) = -\infty \end{cases} \iff \begin{cases} a + b = 0 \\ -4a + b = 0,25 \\ \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{a}{x^4} + bx = -\infty \end{cases}$$

Par différence des deux premières équations on trouve $5a = -0,25 = -\frac{1}{4} \iff a = -\frac{1}{20}$ et la première équation donne $b = \frac{1}{20}$.

On a bien $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{a}{x^4} = -\infty$ et $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} bx = 0$, donc $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} h(x) = -\infty$.

Conclusion la fonction h définie sur $]0; 1]$ par $h(x) = -\frac{1}{20x^4} + \frac{x}{20}$ vérifie les trois conditions.

Partie B

$$f(x) = \frac{1}{20} \left(x - \frac{1}{x^4} \right).$$

3. La fonction f différence de fonctions dérivables sur $]0; 1]$ est dérivable sur cet intervalle et

$$f'(x) = \frac{1}{20} \left(1 + \frac{4}{x^5} \right).$$

Sur $]0; 1]$ les deux termes de cette somme sont supérieurs à zéro, donc la dérivée est strictement positive : la fonction f est donc strictement croissante de moins l'infini (car $\lim_{x \rightarrow 0} -\frac{1}{x^4} =$

$$-\infty) \text{ à } f(1) = \frac{1}{20}(1 - 1) = 0.$$

La fonction f étant continue il existe donc un réel unique α de $]0; 1]$ tel que $f(\alpha) = -5$.

$$\text{On a } f(0,3) = \frac{1}{20} \left(0,3 - \frac{1}{0,3^4} \right) \approx -6,2$$

$$\text{et } f(0,4) = \frac{1}{20} \left(0,4 - \frac{1}{0,4^4} \right) \approx -1,9,$$

donc $0,3 < \alpha < 0,4$.

$$f(0,32) \approx -4,75 \text{ et } f(0,31) \approx -5,4, \text{ donc}$$

$$0,31 < \alpha < 0,32.$$

2. a. u est dérivable sur $]0; 1]$ comme inverse de la fonction v définie sur $]0; 1]$ par $v(x) = 2x^2$.

On a $u'(x) = -\frac{v'}{v^2} = -\frac{4x}{4x^4} = -\frac{1}{x^3}$.

b. $V = \int_{\alpha}^1 \pi x^2 f'(x) dx = \int_{\alpha}^1 \pi x^2 \times \frac{1}{20} \left(1 + \frac{4}{x^5}\right) dx = \int_{\alpha}^1 \frac{\pi}{20} \left(x^2 + \frac{4}{x^3}\right) dx = \frac{\pi}{20} \left(\frac{x^3}{3} - \frac{4}{2x^2}\right)_{\alpha}^1 = \frac{\pi}{20} \left(\frac{1^3}{3} - \frac{4}{2} - \left(\frac{\alpha^3}{3} - \frac{4}{2\alpha^2}\right)\right) = \frac{\pi}{20} \left(-\frac{5}{3} - \frac{\alpha^3}{3} + \frac{4}{2\alpha^2}\right) = \frac{\pi}{20} \left(-\frac{5}{3} - \frac{\alpha^3}{3} + \frac{2}{\alpha^2}\right)$.

Avec $\alpha \approx 0,31$ on obtient 3,006 et avec $\alpha \approx 0,32$ on obtient 2,804.

Donc $2,804 < V < 3,006$.

Exercice 3

5 points

Commun à tous les candidats

On considère la suite (I_n) définie par $I_0 = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{1-x} dx$ et pour tout entier naturel n non nul

$$I_n = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x^n}{1-x} dx.$$

1. $I_0 = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{1-x} dx$.

Sur l'intervalle $[0; \frac{1}{2}]$, la fonction $x \mapsto \frac{1}{1-x}$ est la dérivée de la fonction $x \mapsto -\ln(1-x)$, donc

$$I_0 = [-\ln(1-x)]_0^{\frac{1}{2}} : -\ln \frac{1}{2} + \ln 1 = -(-\ln 2) + 0 = \ln 2.$$

2. a. $I_0 - I_1 = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{1-x} dx - \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x}{1-x} dx = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1-x}{1-x} dx$ (par linéarité de l'intégrale), donc

$$I_0 - I_1 = \int_0^{\frac{1}{2}} 1 dx = \frac{1}{2}.$$

b. $I_0 - I_1 = \frac{1}{2} \iff I_1 = I_0 - \frac{1}{2} = \ln 2 - \frac{1}{2}$.

3. a. Quel que soit le naturel n :

$$I_n - I_{n+1} = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x^n}{1-x} dx - I_n = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x^{n+1}}{1-x} dx$$
 et par linéarité de l'intégrale :

$$I_n - I_{n+1} = \int_0^{\frac{1}{2}} \left(\frac{x^n}{1-x} - \frac{x^{n+1}}{1-x}\right) dx = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x^n - x^{n+1}}{1-x} dx = \int_0^{\frac{1}{2}} x^n \frac{1-x}{1-x} dx = \int_0^{\frac{1}{2}} x^n dx \left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_0^{\frac{1}{2}} = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{n+1}.$$

b.

$I \leftarrow \ln 2$
 $k \leftarrow 0$
 Tant que $k < n$ faire
 $k \leftarrow k + 1$
 $I \leftarrow I - \frac{0,5^k}{k}$
 Fin Tant que
 Afficher I

4. Soit n un entier naturel non nul.

On admet que si x appartient à l'intervalle $[0; \frac{1}{2}]$ alors $0 \leq \frac{x^n}{1-x} \leq \frac{1}{2^{n-1}}$.

- a. On sait que les intégrales de ces trois fonctions positives sont rangées dans le même ordre que ces fonctions, donc

$$\int_0^{\frac{1}{2}} 0 dx \leq \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x^n}{1-x} dx \leq \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{2^{n-1}} dx \text{ soit :}$$

$$0 \leq I_n \leq \left[\frac{x}{2^{n-1}} \right]_0^{\frac{1}{2}} \text{ et enfin } 0 \leq I_n \leq \frac{1}{2^n}.$$

- b. On sait que $0 < \frac{1}{2} < 1 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$, donc d'après le théorème des « gendarmes »,
 $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = 0$.

5. a. Démonstration par récurrence :

• *Initialisation* : $S_1 = \frac{1}{2} = I_0 - I_1$ (démonstré à la question 2. a. : la relation est vraie au rang $n = 1$).

• *Hérédité* Supposons que pour un naturel $n \geq 1$, on ait :

$$S_n = I_0 - I_n, \text{ alors } S_{n+1} = S_n + \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{n+1} = I_0 - I_n + \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{n+1} = I_0 - I_n + (I_n - I_{n+1}) \text{ (résultat 3. a.)}$$

Donc :

$$S_n = I_0 - I_n + I_n - I_{n+1} = I_0 - I_{n+1} : \text{l'égalité est vraie au rang } n+1.$$

On a démontré que la relation est vraie au rang 1 et que si elle est vraie à un rang supérieur ou égal à 1, elle est vraie au rang suivant : d'après l'axiome de récurrence, pour $n \geq 1$,
 $S_n = I_0 - I_n$.

- b. On a vu à la question 4. b. que $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = 0$, donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = I_0 = \ln 2$.

Exercice 4

5 points

Pour les candidats n'ayant pas suivi la spécialité

1. Les trois points E, B et D appartenant aux trois axes de coordonnées et n'étant pas confondues avec O, le plan (EBD) existe et a une équation de la forme :

$$M(x; y; z) \in (\text{EBD}) \iff ax + by + cz = d, \text{ avec } a, b, c \text{ et } d \text{ réels.}$$

Donc :

$$E(0; 0; 6) \in (\text{EBD}) \iff 6c = d \iff c = \frac{d}{6};$$

$$B(12; 0; 0) \in (\text{EBD}) \iff 12a = d \iff a = \frac{d}{12};$$

$$D(0; 18; 0) \in (\text{EBD}) \iff 18b = d \iff b = \frac{d}{18}.$$

$$\text{Donc } M(x; y; z) \in (\text{EBD}) \iff \frac{d}{12}x + \frac{d}{18}y + \frac{d}{6}z = d \iff \frac{1}{12}x + \frac{1}{18}y + \frac{1}{6}z = 1 \iff \frac{1}{2}x + \frac{1}{3}y + z = 6 \iff 3x + 2y + 6z = 36.$$

2. a. G a même abscisse que B, même ordonnée que D et même cote que E, donc $G(18; 6; 12)$.

$$\text{On a donc } \overrightarrow{AG} = \begin{pmatrix} 12 \\ 18 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

$$M(x; y; z) \in (\text{AG}) \iff \text{il existe } t \in \mathbb{R}, \overrightarrow{AM} = t\overrightarrow{AG} \text{ c'est-à-dire si, avec } \overrightarrow{AM} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} :$$

$$\begin{cases} x = 12t \\ y = 18t \\ z = 6t \end{cases}$$

- b. Le point $K(x; y; z)$ existe si ses coordonnées vérifient l'équation de la droite (AG) et l'équation du plan (EBD) soit si le système suivant a au moins une solution :

$$\begin{cases} x & = & 12t \\ y & = & 18t \\ z & = & 6t \\ 3x+2y+6z & = & 36 \end{cases} \Rightarrow \text{(en remplaçant dans la dernière équation)}$$

$$3 \times 12t + 2 \times 18t + 6 \times 6t = 36 \iff 36t + 36t + 36t = 36 \iff 108t = 36 \iff 6 \times 18t = 6 \times 6 \iff 18t = 6 \iff t = \frac{1}{3}.$$

En reportant on obtient $x = 12 \times \frac{1}{3} = 4$, $y = 18 \times \frac{1}{3} = 6$, $z = 6 \times \frac{1}{3} = 2$.

Donc $K(4; 6; 2)$

3. Un vecteur \vec{n} normal au plan (EBD) a pour coordonnées $\vec{n} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix}$.

La droite (AG) est-elle orthogonale au plan (EBD) si \vec{n} et \vec{AG} sont colinéaires ce qui est manifestement faux puisque $12 = 3 \times 4$, $18 = 2 \times 9$

4. a. $E(0; 0; 6)$ et $D(0; 18; 0)$, donc $M(0; 9; 3)$.

On a donc $\vec{BK} \begin{pmatrix} -8 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\vec{BM} \begin{pmatrix} -12 \\ 9 \\ 3 \end{pmatrix}$.

On a $\vec{BM} = 1,5\vec{BK}$: les vecteurs sont colinéaires, donc les points B, K et M sont alignés.

- b. On trace [AH] qui coupe [DE] en son milieu M car ADHE est un rectangle.

Le point K appartient à la droite (AG) et d'après la question précédente à la droite (BM) : il est à l'intersection de ces deux droites. (voir la figure à la fin)

5. a. Les deux plans (ADE) et P sont parallèles : ils sont coupés par un troisième plan (EBD) selon deux droites parallèles; le plan P coupe donc le plan (EBD) selon une parallèle à la droite (ED).
- b. La parallèle à la droite (ED) passant par K est tracée en tireté (voir la figure à la fin).

Exercice 4

5 points

Pour les candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

On considère la matrice $M = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ et les suites d'entiers naturels (u_n) et (v_n) définies par :

$$u_0 = 1, v_0 = 0, \text{ et pour tout entier naturel } n, \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}.$$

Les deux parties peuvent être traitées de façon indépendante.

Partie A

On a calculé les premiers termes de la suite (v_n) :

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
v_n	0	1	4	15	56	209	780	2911	10864	40545	151316	564719	2107560

1. D'après le tableau il semble que les chiffres des unités de v_n soient de façon cyclique : 0, 1, 4, 5, 6, 9.

2. a. On a $M^2 = \begin{pmatrix} 4+3 & 6+6 \\ 2+2 & 3+4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 12 \\ 4 & 7 \end{pmatrix}$, puis
- $$M^3 = M^2 \times M = \begin{pmatrix} 14+12 & 21+24 \\ 8+7 & 12+14 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 26 & 45 \\ 15 & 26 \end{pmatrix}.$$
- L'égalité (admise) $\begin{pmatrix} u_{n+3} \\ v_{n+3} \end{pmatrix} = M^3 \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$ se traduit donc par
- $$\begin{cases} u_{n+3} = 26u_n + 45v_n \\ v_{n+3} = 15u_n + 26v_n \end{cases} \text{ quel que soit le naturel } n.$$
- b. Du dernier résultat précédent on déduit que $15u_n \equiv 0 [5]$ et par conséquent que $v_{n+3} \equiv 26v_n [5]$ et enfin que $v_{n+3} \equiv v_n [5]$.
3. *Initialisation* : pour $q = 0$, on a $v_r \equiv v_r [5]$ l'équivalence est vraie au rang 0.
Hérédité : supposons que pour $q \in \mathbb{N}$, on ait $v_{3q+r} \equiv v_r [5]$.
 Alors $v_{3(q+1)+r} = v_{3q+3+r} = v_{3q+r+3} \equiv v_{3q+r} [5]$ d'après la question précédente.
 On a donc $v_{3(q+1)+r} \equiv v_{3q+r} [5]$: l'équivalence est vraie au rang $q+1$.
 L'équivalence est vraie au rang 0 et si elle est vraie au rang q quelconque elle est vraie au rang suivant : d'après le principe de récurrence on a donc pour tout naturel q : $v_{3q+r} \equiv v_r [5]$.
4. • avec $r = 0$, l'équivalence précédente donne $v_{3q} \equiv v_0 [5]$, soit $v_{3q} \equiv 0 [5]$;
 • avec $r = 1$, l'équivalence précédente donne $v_{3q+1} \equiv v_1 [5]$, soit $v_{3q} \equiv 1 [5]$;
 • avec $r = 2$, l'équivalence précédente donne $v_{3q+2} \equiv v_2 [5]$, soit $v_{3q} \equiv 4 [5]$.
5. On a donc montré que pour tout naturel n , u_n est congru à 0 ou 1 ou 4 modulo 5. On a donc $v_n = 5p+0$ ou $v_n = 5p+1$, ou $v_n = 5p+4$.
 • si p est pair, $p = 2q$, alors :
 $v_n = 10q+0$, ou $v_n = 10q+1$, ou $v_n = 10q+4$, ce qui signifie que v_n est congru à 0, 1 ou 4 modulo 5 ;
 • si p est impair, $p = 2q+1$, alors :
 $v_n = 10q+5$, ou $v_n = 10q+6$, ou $v_n = 10q+9$, ce qui signifie que v_n a pour chiffre des unités 5, 6 ou 9.
 Finalement le chiffre des unités de v_n est 0, 1, 4, 5, 6, 9.
 L'ensemble des ces valeurs est donc $\{0 ; 1 ; 4 ; 5 ; 6 ; 9\}$

Partie B

1. On sait que $1 < \sqrt{3} < 2$, donc $1 < \frac{p}{q} < 2 \iff q < p < 2q$.
2. Si $M^{-1} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, on a $M = M^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \iff$
- $$\begin{cases} 2a+3c = 1 \\ 2b+3d = 0 \\ 2a+2c = 0 \\ 2b+2d = 1 \end{cases}.$$
- On obtient de la première et de la troisième équation par différence $c = 1$, puis $a = -1$ et de même $d = 2$ et $b = -3$.
 Donc $M = \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$
3. a. $\begin{pmatrix} p' \\ q' \end{pmatrix} = M^{-1} \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$ entraîne $p' = 2p - 3q$ et $q' = -p + 2q$.
- b. Puisque p et q sont des entiers naturels non nuls les relations de la question précédente montrent que p' et q' sont des entiers relatifs.

c. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $p' = \alpha q'$.

$$p' = \alpha q' \iff 2p - 3q = \alpha(-p + 2q) \iff (2 + \alpha)p = (3 + 2\alpha)q.$$

$$\text{Mais } \frac{p}{q} = \sqrt{3} \iff p = q\sqrt{3}, \text{ donc}$$

$$(2 + \alpha)q\sqrt{3} = (3 + 2\alpha)q \iff \sqrt{3}(2 + \alpha) = 3 + 2\alpha \iff \alpha(2 - \sqrt{3}) = 2\sqrt{3} - 3 \iff$$

$$\alpha(2 - \sqrt{3}) = \sqrt{3}(2 - \sqrt{3}) \iff \alpha = \sqrt{3}.$$

$$\text{On a donc } p' = q'\sqrt{3}.$$

d. On a vu à la question 1. que $q < p < 2q \iff 2q < 2p < 4q \iff -q < 2p - 3q < q \iff -q < p' < q$.

De plus $q' = -p + 2q = -\sqrt{3}q + 2q = (2 - \sqrt{3})q$: q' est le produit de deux facteurs supérieurs à zéro : donc $q' > 0$.

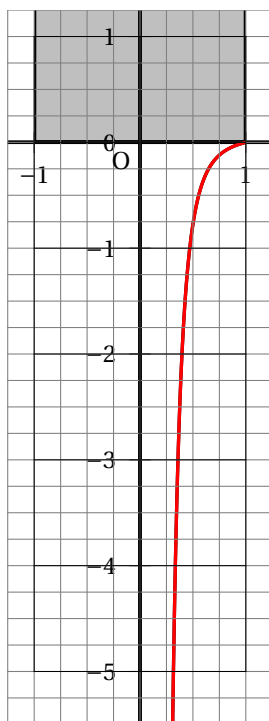
$$\text{Finalement : } 0 < q' < q.$$

e. On a supposé que $\frac{p}{q} = \sqrt{3}$, la fraction étant irréductible et q le plus petit possible et on

trouvé que dans ce cas $\sqrt{3} = \frac{p'}{q'}$ donc un autre quotient avec $q' < q$: ceci est contradictoire : l'hypothèse initiale est fautive.

Conclusion $\sqrt{3}$ n'est pas un rationnel.

Annexe 1 (exercice 2) :



Annexe 2 (exercice 4 pour les candidats n'ayant pas suivi la spécialité) : à rendre avec la copie

