

## Baccalauréat S Antilles-Guyane 19 juin 2018

### EXERCICE 1

5 points

COMMUN À TOUS LES CANDIDATS

L'exploitant d'une forêt communale décide d'abattre des arbres afin de les vendre, soit aux habitants, soit à des entreprises. On admet que :

- parmi les arbres abattus, 30 % sont des chênes, 50 % sont des sapins et les autres sont des arbres d'essence secondaire (ce qui signifie qu'ils sont de moindre valeur);
- 45,9 % des chênes et 80 % des sapins abattus sont vendus aux habitants de la commune;
- les trois quarts des arbres d'essence secondaire abattus sont vendus à des entreprises.

#### Partie A

Parmi les arbres abattus, on en choisit un au hasard.

On considère les évènements suivants :

- $C$  : « l'arbre abattu est un chêne »;
- $S$  : « l'arbre abattu est un sapin »;
- $E$  : « l'arbre abattu est un arbre d'essence secondaire »;
- $H$  : « l'arbre abattu est vendu à un habitant de la commune ».

1. Construire un arbre pondéré complet traduisant la situation.
2. Calculer la probabilité que l'arbre abattu soit un chêne vendu à un habitant de la commune.
3. Justifier que la probabilité que l'arbre abattu soit vendu à un habitant de la commune est égale à 0,5877.
4. Quelle est la probabilité qu'un arbre abattu vendu à un habitant de la commune soit un sapin? On donnera le résultat arrondi à  $10^{-3}$ .

#### Partie B

Le nombre d'arbres sur un hectare de cette forêt peut être modélisé par une variable aléatoire  $X$  suivant une loi normale d'espérance  $\mu = 4000$  et d'écart-type  $\sigma = 300$ .

1. Déterminer la probabilité qu'il y ait entre 3400 et 4600 arbres sur un hectare donné de cette forêt. On donnera le résultat arrondi à  $10^{-3}$ .
2. Calculer la probabilité qu'il y ait plus de 4500 arbres sur un hectare donné de cette forêt. On donnera le résultat arrondi à  $10^{-3}$ .

#### Partie C

L'exploitant affirme que la densité de sapins dans cette forêt communale est de 1 sapin pour 2 arbres. Sur une parcelle, on a compté 106 sapins dans un échantillon de 200 arbres. Ce résultat remet-il en cause l'affirmation de l'exploitant?

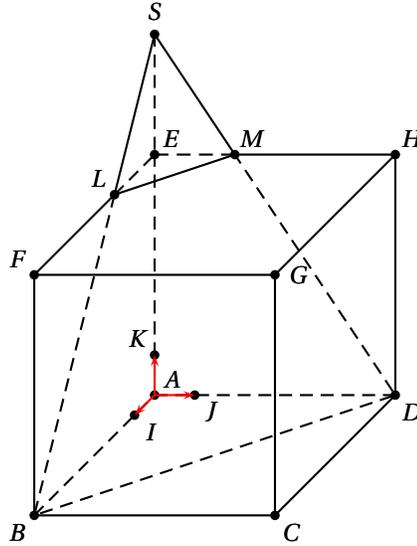
### EXERCICE 2

5 points

COMMUN À TOUS LES CANDIDATS

Un artiste souhaite réaliser une sculpture composée d'un tétraèdre posé sur un cube de 6 mètres d'arête.

Ces deux solides sont représentés par le cube  $ABCDEFGH$  et par le tétraèdre  $SELM$  ci-dessous.



On munit l'espace du repère orthonormé  $(A; \overrightarrow{AI}, \overrightarrow{AJ}, \overrightarrow{AK})$  tel que :  $I \in [AB]$ ,  $J \in [AD]$ ,  $K \in [AE]$  et  $AI = AJ = AK = 1$ , l'unité graphique représentant 1 mètre.

Les points  $L$ ,  $M$  et  $S$  sont définis de la façon suivante :

- $L$  est le point tel que  $\overrightarrow{FL} = \frac{2}{3}\overrightarrow{FE}$ ;
- $M$  est le point d'intersection du plan  $(BDL)$  et de la droite  $(EH)$ ;
- $S$  est le point d'intersection des droites  $(BL)$  et  $(AK)$ .

1. Démontrer, sans calcul de coordonnées, que les droites  $(LM)$  et  $(BD)$  sont parallèles.
2. Démontrer que les coordonnées du point  $L$  sont  $(2; 0; 6)$ .
3. a. Donner une représentation paramétrique de la droite  $(BL)$ .  
b. Vérifier que les coordonnées du point  $S$  sont  $(0; 0; 9)$ .
4. Soit  $\vec{n}$  le vecteur de coordonnées  $(3; 3; 2)$ .  
a. Vérifier que  $\vec{n}$  est normal au plan  $(BDL)$ .  
b. Démontrer qu'une équation cartésienne du plan  $(BDL)$  est :

$$3x + 3y + 2z - 18 = 0.$$

- c. On admet que la droite  $(EH)$  a pour représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = s \quad (s \in \mathbb{R}) \\ z = 6 \end{cases}$$

Calculer les coordonnées du point  $M$ .

5. Calculer le volume du tétraèdre  $SELM$ . On rappelle que le volume  $V$  d'un tétraèdre est donné par la formule suivante :

$$V = \frac{1}{3} \times \text{Aire de la base} \times \text{Hauteur}.$$

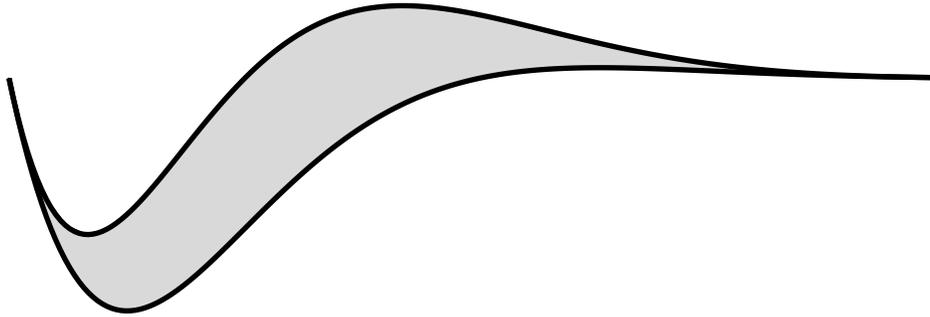
6. L'artiste souhaite que la mesure de l'angle  $\widehat{SLE}$  soit comprise entre  $55^\circ$  et  $60^\circ$ . Cette contrainte d'angle est-elle respectée?

### EXERCICE 3

5 POINTS

COMMUN À TOUS LES CANDIDATS

Un publicitaire souhaite imprimer le logo ci-dessous sur un T-shirt :



Il dessine ce logo à l'aide des courbes de deux fonctions  $f$  et  $g$  définies sur  $\mathbb{R}$  par :

$$f(x) = e^{-x}(-\cos x + \sin x + 1) \text{ et } g(x) = -e^{-x} \cos x.$$

On admet que les fonctions  $f$  et  $g$  sont dérivables sur  $\mathbb{R}$ .

#### Partie A — Étude de la fonction $f$

1. Justifier que, pour tout  $x \in \mathbb{R}$  :

$$-e^{-x} \leq f(x) \leq 3e^{-x}.$$

2. En déduire la limite de  $f$  en  $+\infty$ .
3. Démontrer que, pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $f'(x) = e^{-x}(2\cos x - 1)$  où  $f'$  est la fonction dérivée de  $f$ .
4. Dans cette question, on étudie la fonction  $f$  sur l'intervalle  $[-\pi; \pi]$ .
- Déterminer le signe de  $f'(x)$  pour  $x$  appartenant à l'intervalle  $[-\pi; \pi]$ .
  - En déduire les variations de  $f$  sur  $[-\pi; \pi]$ .

#### Partie B — Aire du logo

On note  $\mathcal{C}_f$  et  $\mathcal{C}_g$  les représentations graphiques des fonctions  $f$  et  $g$  dans un repère orthonormé  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ . L'unité graphique est de 2 centimètres. Ces deux courbes sont tracées en ANNEXE.

- Étudier la position relative de la courbe  $\mathcal{C}_f$  par rapport à la courbe  $\mathcal{C}_g$  sur  $\mathbb{R}$ .
- Soit  $H$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par :

$$H(x) = \left( -\frac{\cos x}{2} - \frac{\sin x}{2} - 1 \right) e^{-x}.$$

On admet que  $H$  est une primitive de la fonction  $x \mapsto (\sin x + 1)e^{-x}$  sur  $\mathbb{R}$ .

On note  $\mathcal{D}$  le domaine délimité par la courbe  $\mathcal{C}_f$ , la courbe  $\mathcal{C}_g$  est les droites d'équation  $x = -\frac{\pi}{2}$  et  $x = \frac{3\pi}{2}$ .

- Hachurer le domaine  $\mathcal{D}$  sur le graphique en annexe à rendre avec la copie.
- Calculer, en unité d'aire, l'aire du domaine  $\mathcal{D}$ , puis en donner une valeur approchée à  $10^{-2}$  près en  $\text{cm}^2$ .

**EXERCICE 4****5 POINTS**

CANDIDATS N'AYANT PAS SUIVI L'ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

Le directeur d'une réserve marine a recensé 3 000 cétacés dans cette réserve au 1<sup>er</sup> juin 2017. Il est inquiet car il sait que le classement de la zone en « réserve marine » ne sera pas reconduit si le nombre de cétacés de cette réserve devient inférieur à 2 000.

Une étude lui permet d'élaborer un modèle selon lequel, chaque année :

- entre le 1<sup>er</sup> juin et le 31 octobre, 80 cétacés arrivent dans la réserve marine ;
- entre le 1<sup>er</sup> novembre et le 31 mai, la réserve subit une baisse de 5 % de son effectif par rapport à celui du 31 octobre qui précède.

On modélise l'évolution du nombre de cétacés par une suite  $(u_n)$ . Selon ce modèle, pour tout entier naturel  $n$ ,  $u_n$  désigne le nombre de cétacés au 1<sup>er</sup> juin de l'année 2017 +  $n$ . On a donc  $u_0 = 3000$ .

- Justifier que  $u_1 = 2926$ .
- Justifier que, pour tout entier naturel  $n$ ,  $u_{n+1} = 0,95u_n + 76$ .
- À l'aide d'un tableur, on a calculé les 8 premiers termes de la suite  $(u_n)$ . Le directeur a configuré le format des cellules pour que ne soient affichés que des nombres arrondis à l'unité.

|   | A     | B     | C     | D     | E     | F     | G     | H     | I     |
|---|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| 1 | $n$   | 0     | 1     | 2     | 3     | 4     | 5     | 6     | 7     |
| 2 | $u_n$ | 3 000 | 2 926 | 2 856 | 2 789 | 2 725 | 2 665 | 2 608 | 2 553 |

Quelle formule peut-on entrer dans la cellule C2 afin d'obtenir, par recopie vers la droite, les termes de la suite  $(u_n)$  ?

- Démontrer que, pour tout entier naturel  $n$ ,  $u_n \geq 1520$ .
  - Démontrer que la suite  $(u_n)$  est décroissante.
  - Justifier que la suite  $(u_n)$  est convergente. On ne cherchera pas ici la valeur de la limite.
- On désigne par  $(v_n)$  la suite définie par, pour tout entier naturel  $n$ ,  $v_n = u_n - 1520$ .
  - Démontrer que la suite  $(v_n)$  est une suite géométrique de raison 0,95 dont on précisera le premier terme.
  - En déduire que, pour tout entier naturel  $n$ ,  $u_n = 1480 \times 0,95^n + 1520$ .
  - Déterminer la limite de la suite  $(u_n)$ .
- Recopier et compléter l'algorithme suivant pour déterminer l'année à partir de laquelle le nombre de cétacés présents dans la réserve marine sera inférieur à 2 000.

|                      |
|----------------------|
| $n \leftarrow 0$     |
| $u \leftarrow 3000$  |
| Tant que ...         |
| $n \leftarrow \dots$ |
| $u \leftarrow \dots$ |
| Fin de Tant que      |

La notation «  $\leftarrow$  » correspond à une affectation de valeur, ainsi «  $n \leftarrow 0$  » signifie « Affecter à  $n$  la valeur 0 ».

- La réserve marine fermera-t-elle un jour ? Si oui, déterminer l'année de la fermeture.

**EXERCICE 4****5 POINTS**

CANDIDATS AYANT SUIVI L'ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

Le droit de pêche dans une réserve marine est réglementé : chaque pêcheur doit posséder une carte d'accréditation annuelle. Il existe deux types de cartes :

- une carte de pêche dite « libre » (le pêcheur n'est pas limité en nombre de poissons pêchés) ;
- une carte de pêche dite « avec quota » (le pêcheur ne doit pas dépasser une certaine quantité hebdomadaire de poisson).

On suppose que le nombre total de pêcheurs reste constant d'année en année.

On note, pour l'année 2017 + n :

- $\ell_n$  la proportion de pêcheurs possédant la carte de pêche libre ;
- $q_n$  la proportion de pêcheurs possédant la carte de pêche avec quota.

On observe que :

- chaque année, 65 % des possesseurs de la carte de pêche libres achète de nouveaux une carte de pêche libre l'année suivante ;
- Chaque année, 45 % des possesseurs de la carte de pêche avec quota acheté une carte de pêche libre l'année suivante ;
- En 2017, 40 % des pêcheurs ont acheté une carte de pêche libre. On a donc  $\ell_0 = 0,4$  et  $q_0 = 0,6$ .

On note, pour tout entier naturel  $n$ ,  $P_n = \begin{pmatrix} \ell_n \\ q_n \end{pmatrix}$ .

1. Démontrer que, pour tout entier naturel  $n$ ,  $P_{n+1} = MP_n$ , où  $M$  est la matrice carrée  $\begin{pmatrix} 0,65 & 0,45 \\ 0,35 & 0,55 \end{pmatrix}$ .
2. Calculer la proportion de pêcheurs achetant une carte de pêche avec quota en 2019.
3. Un logiciel de calcul formel donne les résultats ci-dessous :

|        |   |        |   |
|--------|---|--------|---|
| 1<br>◦ | $M := \{\{0,65, 0,45\}, \{0,35, 0,55\}\}$<br>$\checkmark M := \begin{pmatrix} 0,65 & 0,45 \\ 0,35 & 0,55 \end{pmatrix}$                                   | 5<br>◦ | $TQ$<br>$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$                      |
| 2<br>◦ | $P_0 := \{\{0,4\}, \{0,6\}\}$<br>$\checkmark P_0 := \begin{pmatrix} 0,4 \\ 0,6 \end{pmatrix}$   | 6<br>◦ | $QT$<br>$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$                      |
| 3<br>◦ | $Q := \{\{9, 1\}, \{7, -1\}\}$<br>$\checkmark Q := \begin{pmatrix} 9 & 1 \\ 7 & -1 \end{pmatrix}$   | 7<br>◦ | $D := TMQ$<br>$\rightarrow D := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{5} \end{pmatrix}$ |
| 4<br>◦ | $T := \{\{1/16, 1/16\}, \{7/16, -9/16\}\}$<br>$\checkmark T := \begin{pmatrix} \frac{1}{16} & \frac{1}{16} \\ \frac{7}{16} & -\frac{9}{16} \end{pmatrix}$ |        |   |

En vous appuyant sur les résultats précédents, répondre aux deux questions suivantes :

- a. Justifier que  $Q$  est une matrice inversible et préciser sa matrice inverse.  
On notera  $Q^{-1}$  la matrice inverse de  $Q$ .
- b. Justifier que  $M = QDQ^{-1}$  et démontrer que, pour tout entier naturel  $n$  non nul :

$$M^n = QD^nQ^{-1}.$$

4. On admet que, pour tout entier naturel  $n$  non nul,

$$M^n = \frac{1}{16} \begin{pmatrix} 9 + 7 \times 0,2^n & 9 - 9 \times 0,2^n \\ 7 - 7 \times 0,2^n & 7 + 9 \times 0,2^n \end{pmatrix}.$$

- a. Démontrer que pour tout entier naturel  $n$ ,  $P_n = M^n P_0$ .
- b. Justifier que, pour tout entier naturel  $n$  :

$$\ell_n = \frac{9}{16} - \frac{13}{80} \times 0,2^n.$$

5. La proportion de pêcheurs achetant la carte de pêche libre dépassera-t-elle 60 % ?

## Exercice 3

