

Corrigé du baccalauréat S – Asie 21 juin 2018

EXERCICE 1

5 points

Commun à tous les candidats

1. Cohérence du modèle

a. On a $f_p(0) = \frac{100p}{1 - (1-p)} = \frac{100p}{p} = 100$.

On a bien une masse initiale de 100 tonnes.

b. On a successivement :

$$0 < p < 1 \iff -p < 0 < 1 - p.$$

D'autre part la fonction $t \mapsto e^{-pt}$ est strictement décroissante sur $[0; +\infty[$ de $e^0 = 1$ à 0.

Donc $e^0 \leq 1$ d'où en multipliant par le nombre positif $1 - p$:

$$(1-p)e^t \leq 1-p \iff 1 - (1-p)e^t \geq p.$$

c. Le résultat précédent $0 < p \leq 1 - p \iff 1 - (1-p)e^t$ donne en prenant les inverses :

$$0 < \frac{1}{1 - (1-p)e^t} < \frac{1}{p} \text{ d'où en multipliant par } 100p :$$

$$0 < \frac{100p}{1 - (1-p)e^t} < \frac{100p}{p} \text{ ou encore } 0 < f_p(t) \leq 100.$$

2. Cas particulier $p = 0,9$: $f_{0,9}(t) = \frac{90}{1 - 0,1e^{-0,9t}}$.

a. La fonction est de la forme $\frac{a}{u}$ avec $u = 1 - 0,1e^{-0,9t}$, de dérivée $-\frac{au'}{u^2}$, donc sur $[0; +\infty[$:

$$f'_{0,9}(t) = -\frac{90 \times 0,1 \times 0,9e^{-0,9t}}{(1 - 0,1e^{-0,9t})^2} = -\frac{8,1e^{-0,9t}}{(1 - 0,1e^{-0,9t})^2}.$$

$f'_{0,9}(t)$ opposée du quotient de deux termes positifs est négative, donc la fonction $f_{0,9}$ est décroissante sur $[0; +\infty[$

b. On a $f_{0,9}(0) = \frac{90}{1 - 0,1} = \frac{90}{0,9} = 100$ (vu à la question 1) et comme $\lim_{t \rightarrow +\infty} e^{-0,9t} = 0$,

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} 0,1e^{-0,9t} = 0, \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} 1 - 0,1e^{-0,9t} = 1 \text{ et finalement } \lim_{t \rightarrow +\infty} f_{0,9}(t) = 90.$$

On a donc $90 \leq f_{0,9}(t) \leq 100$.

c. La masse des crevettes décroît de 100 tonnes à 90 tonnes.

3. Cas général $0 < p < 1$

On sait que $\lim_{t \rightarrow +\infty} e^{-pt} = 0$, donc $\lim_{t \rightarrow +\infty} (1-p)e^{-0,9t} = 0$, puis $\lim_{t \rightarrow +\infty} 1 - (1-p)e^{-0,9t} = 1$ et enfin

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} f_p(t) = 100p.$$

4. Cas particulier $p = \frac{1}{2}$

a. On a $f_{\frac{1}{2}}(t) = \frac{100 \times \frac{1}{2}}{1 - (1 - \frac{1}{2})e^{-\frac{t}{2}}} = \frac{50}{1 - \frac{1}{2}e^{-\frac{t}{2}}} = \frac{100}{2 - e^{-\frac{t}{2}}}$.

Soit H définie sur $[0; +\infty[$ par $H(t) = 100 \ln(2 - e^{-\frac{t}{2}}) + 50t$.

Cette fonction est dérivable sur $[0; +\infty[$ et sur cet intervalle :

$$H'(t) = 100 \frac{\frac{1}{2}e^{-\frac{t}{2}}}{2 - e^{-\frac{t}{2}}} + 50 = \frac{50e^{-\frac{t}{2}}}{2 - e^{-\frac{t}{2}}} + 50 = \frac{50e^{-\frac{t}{2}} + 50(2 - e^{-\frac{t}{2}})}{2 - e^{-\frac{t}{2}}} = \frac{100}{2 - e^{-\frac{t}{2}}} = f_{\frac{1}{2}}(t).$$

La fonction h est donc une primitive de la fonction $f_{\frac{1}{2}}$ sur l'intervalle $[0; +\infty[$.

b. Par définition la masse moyenne sur l'intervalle $[0; 5]$ est égale à :

$$m = \frac{1}{5-0} \int_0^5 f_{\frac{1}{2}}(t) dt = \frac{1}{5} [F(t)]_0^5 = \frac{H(5) - H(0)}{5} = \frac{100 \ln(2 - e^{-\frac{5}{2}}) + 50 \times 5 - (100 \ln(2 - e^{-\frac{0}{2}}) + 50 \times 0)}{5} = 20 \ln(2 - e^{-\frac{5}{2}}) + 50 \approx 63,02 \text{ soit } 63 \text{ à la tonne près.}$$

EXERCICE 2

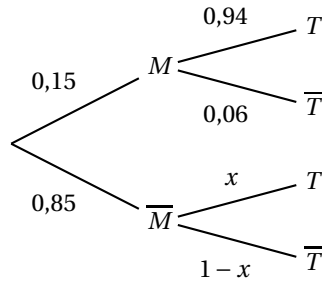
5 points

Commun à tous les candidats

Partie A

Soit M l'évènement : « l'individu est malade » ;

T l'évènement « le test de l'individu est positif ».



1. $\{T; \bar{T}\}$ étant une partition de l'univers, la loi des probabilités totales permet d'écrire :

$$P(T) = p(T \cap M) + P(T \cap \bar{M}), \text{ soit}$$

$$0,158 = 0,15 \times 0,94 + 0,85x \iff 0,158 = 0,141 + 0,85x \iff 0,017 = 0,85x \iff x = \frac{0,017}{0,85} = 0,02.$$

On veut trouver la probabilité qu'un individu soit malade sachant que son test est positif, soit :

$$P_T(M) = \frac{P(T \cap M)}{P(T)} = \frac{0,141}{0,158} \approx 0,892, \text{ soit } 0,89 \text{ au centième : réponse C}$$

2. La population est assez importante pour que l'on puisse avoir n épreuves indépendantes de Bernoulli avec comme paramètres n et $p = 0,158$.

La probabilité que sur n personnes le test ne soit pas positif est $(1 - 0,158)^n = 0,842^n$ et par conséquent la probabilité qu'au moins un individu soit testé positivement est $1 - 0,842^n$.

$$\text{On veut que } 1 - 0,842^n \geq 0,99 \iff 0,01 \geq 0,842^n \iff \ln(0,01) \geq n \ln(0,842) \iff n \geq \frac{\ln(0,01)}{\ln(0,842)}$$

(car $\ln(0,842) < 0$).

$$\text{Or } \frac{\ln(0,01)}{\ln(0,158)} \approx 26,7.$$

Il faut donc tester au moins 27 personnes : réponse B.

3. On sait que $P(2 - 3\sigma \leq X \leq 2 + 3\sigma) \approx 0,997$.

$$\text{On a donc } 0,01 = 3\sigma \iff \sigma = \frac{0,01}{3} \approx 0,0033 : \text{ donc réponse C.}$$

Partie B

1. Soit E la variable aléatoire donnant la durée d'efficacité après les 12 premiers mois.

$$\text{On sait que } P(E > 18 - 12) = 0,887 \text{ ou } P(E > 6) = 0,887 \iff e^{-6\lambda} = 0,887 \iff -6\lambda = \ln 0,887 \iff$$

$$\lambda = -\frac{\ln 0,887}{6} \approx 0,019985.$$

2. Les paramètres sont $p = 0,15$ et $n = 100000$.

Or $n \geq 30$ est vraie, $np = 0,15 \times 100000 = 15000 \geq 5$ est vraie et $n(1-p) = 100000 \times 0,85 = 85000 \geq 5$ est vraie.

On peut donc calculer un intervalle de fluctuation asymptotique de la proportion de personnes touchées par la maladie :

$$\left[0,15 - 1,96\sqrt{\frac{0,15 \times 0,85}{100000}} ; 0,15 + 1,96\sqrt{\frac{0,15 \times 0,85}{100000}} \right] \approx [0,14778 ; 0,15222]$$

Il faut que le stock soit au moins de 15222 de boîtes de médicament.

EXERCICE 3

5 points

Commun à tous les candidats

1. On a $AB^2 = (3+3)^2 + 2^2 + 0^2 = 36$ et $AD^2 = 3^2 + 3 + 4 \times 4 = 36$.

On a donc $AB = AD = 6$.

2. a. Les coordonnées de H milieu de [CD] sont $(0; 2\sqrt{3}; \sqrt{6})$. Donc $\overrightarrow{OH}(0; 2\sqrt{3}; \sqrt{6})$.

\overrightarrow{OH} étant normal au plan \mathcal{P} celui-ci a une équation de la forme $0 \times x + 2y\sqrt{3} + z\sqrt{6} + d = 0$.

Le milieu de [BC] est $I(\frac{3}{2}; \frac{3}{2}\sqrt{3}; 0)$: ce point appartenant au plan \mathcal{P} ses coordonnées vérifient l'équation précédente soit :

$$2\sqrt{3} \times \frac{3}{2}\sqrt{3} + \sqrt{6} \times 0 + d = 0, \text{ soit } 9 + d = 0 \iff d = -9.$$

Une équation cartésienne de \mathcal{P} est donc : $M(x; y; z) \in \mathcal{P} \iff 2y\sqrt{3} + z\sqrt{6} - 9 = 0$.

b. [BD] a pour milieu $J(\frac{3}{2}; \frac{1}{2}\sqrt{3}; \sqrt{6})$.

Or $J \in \mathcal{P} \iff 2\sqrt{3} \times \frac{1}{2}\sqrt{3} + \sqrt{6} \times \sqrt{6} - 9 = 0 \iff 3 + 6 - 9 = 0$: cette égalité est vraie donc $J \in \mathcal{P}$.

J est donc le point d'intersection de la droite (BD) et du plan \mathcal{P} .

c. Équation paramétrique de la droite (AD) :

$$M(x; y; z) \in (AD) \iff \text{il existe } t \in \mathbf{R} \text{ tel que } \overrightarrow{AM} = t\overrightarrow{AD} \iff \begin{cases} x - (-3) &= 3t \\ y - 0 &= t\sqrt{3} \\ z - 0 &= 2t\sqrt{6} \end{cases}$$

$$M(x; y; z) \in (AD) \iff \begin{cases} x &= 3t - 3 \\ y &= t\sqrt{3} \\ z &= 2t\sqrt{6} \end{cases}$$

Les points communs à la droite (AD) et au plan \mathcal{P} ont leurs coordonnées qui vérifient :

$$\begin{cases} x &= 3t - 3 \\ y &= t\sqrt{3} \\ z &= 2t\sqrt{6} \\ 2y\sqrt{3} + z\sqrt{6} - 9 &= 0 \end{cases} \Rightarrow 2 \times t\sqrt{3} \times \sqrt{3} + 2t\sqrt{6} \times \sqrt{6} - 9 = 0 \iff$$

$$6t + 12t - 9 = 0 \iff 18t = 9 \iff t = \frac{1}{2}.$$

En remplaçant dans l'équation paramétrique de la droite (AD) on trouve que le point $K(-\frac{3}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}; \sqrt{6})$ est le point commun à la droite (AD) et au plan \mathcal{P} .

d. On calcule les coordonnées des vecteurs :

$$\overrightarrow{IJ}(0; -\sqrt{3}; \sqrt{6}) \text{ et } \overrightarrow{JK}(-3; 0; 0).$$

Calculons le produit scalaire : $\overrightarrow{IJ} \cdot \overrightarrow{JK} = 0 + 0 + 0 = 0$: les vecteurs sont orthogonaux, donc les droites (IJ) et (JK) sont perpendiculaires en J.

e. Soit L le milieu du segment [AC] de coordonnées $(-\frac{3}{2}; \frac{3}{2}\sqrt{3}; 0)$.

Or $2 \times \frac{3}{2}\sqrt{3} \times \sqrt{3} + 0 - 9 = 0$, ce qui montre que L appartient au plan \mathcal{P} .

Le plan \mathcal{P} coupe donc [BC] en I, [BD] en J, [AD] en K et [AC] en L, donc la section de ABCD par le plan \mathcal{P} est le quadrilatère (IJKL).

Or dans le triangle (BCD), (IJ) // (CD) (droite des milieux) et $CD = 2IJ = 3$,

dans le triangle (ACD), (KL) // (CD) (droite des milieux) et $CD = 2KL = 3$,

dans le triangle (ABC), (IO) // (AC) (droite des milieux) et $AC = 2IO = 3$,

dans le triangle (BCD), (OK) // (AD) (droite des milieux) et $AD = 2OK = 3$, d'où il résulte que $IJ = JK = KL = LI = 1,5$, ce qui montre que le quadrilatère (IJKL) est un losange.

Or on a démontré à la question 2. d. que l'angle en J de ce losange est droit, donc (IJKL) est un carré.

3. À partir des coordonnées $\overrightarrow{BD}(-3; \sqrt{3}; 2\sqrt{6})$ on trouve qu'une écriture paramétrique de la droite (BD) est :

$$\begin{cases} x = -3t + 3 \\ y = t\sqrt{3} \\ z = 2t\sqrt{6} \end{cases} . \text{ On a donc :}$$

$$\overrightarrow{OM} \begin{pmatrix} -3t + 3 \\ t\sqrt{3} \\ 2t\sqrt{6} \end{pmatrix} \text{ et } \overrightarrow{IM} \begin{pmatrix} -3t + \frac{3}{2} \\ t\sqrt{3} - \frac{3}{2}\sqrt{3} \\ 2t\sqrt{6} \end{pmatrix}.$$

$$\begin{aligned} \text{D'où on déduit : } \overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{IM} &= (-3t + 3)(-3t + \frac{3}{2}) + t\sqrt{3}(t\sqrt{3} - \frac{3}{2}\sqrt{3}) + 2t\sqrt{6} \times 2t\sqrt{6} = \\ &= 9t^2 - \frac{9t}{2} - 9t + \frac{9}{2} + 3t^2 - \frac{9}{2}t + 24t^2 = 36t^2 - 18t + \frac{9}{2}. \end{aligned}$$

Le triangle OMI est rectangle en M si les vecteurs \overrightarrow{OM} et \overrightarrow{IM} sont orthogonaux, donc si leur produit scalaire est nul, donc si le trinôme du second degré est nul, or

$$\Delta = 18^2 - 4 \times 36 \times \frac{9}{2} = 464 - 18 \times 36 = -324.$$

Ce trinôme n'a pas de racines réelles : il n'existe pas de position du point M tel que le triangle OIM soit rectangle en M.

EXERCICE 4

5 points

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

1. On calcule $|OC|^2 = y^2 + 1$; $|OA|^2 = 1^2 + 1^2 = 2$; $|OB|^2 = x^2 + 1$.

Si $OC = OA \times OB$, alors $OC^2 = OA^2 \times OB^2$, soit :

$$y^2 + 1 = 2(x^2 + 1) \iff y^2 + 1 = 2x^2 + 2 \iff y^2 = 2x^2 + 1.$$

2.

```

Pour x allant de 1 à 10 faire
  Pour y allant de 1 à 10 faire
    Si  $y^2 = 2x^2 + 1$ 
      Afficher x et y
    Fin Si
  Fin Pour
Fin Pour

```

3. On a $x = 2$ et $y = 3$.

a. $z_A = 1 + i$, donc $||^2 = 1 + 1 = 2$, d'où $|z_A| = \sqrt{2}$.

Donc $z_A = \sqrt{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = \sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right)$. Donc un argument de z_A est $\frac{\pi}{4}$.

- b.** On a $OC = \sqrt{3^2 + 1} = \sqrt{10}$.
 $OA = \sqrt{2}$ et $OB = |x + i| = \sqrt{4 + 1} = \sqrt{5}$.
On a bien $OC = OA \times OB$.
- c.** On a $z_B z_C = (x + i)(y + i) = (2i)(3 + i) = 6 + 5i - 1 = 5 + 5i$.
 $5z_A = 5(1 + i) = 5 + 5i$.
Donc $z_B z_C = 5z_A$.
On en déduit en prenant les arguments que $\arg(5z_A) = \arg(z_A) =$
 $(\vec{u}, \overrightarrow{OA}) = (\vec{u}, \overrightarrow{OB}) + (\vec{u}, \overrightarrow{OC})$.
- 4. a.** $\arg\left(\frac{(x+i)(y+i)}{1+i}\right) = \arg((x+i)(y+i)) - \arg(1+i) = \arg(x+i) + \arg(y+i) - \arg(1+i) = \arg z_B + \arg z_C - \arg z_A = (\vec{u}, \overrightarrow{OB}) + (\vec{u}, \overrightarrow{OC}) - (\vec{u}, \overrightarrow{OA}) = 0$ à 2π près, d'après le résultat de la question précédente.
- b.** On a vu que si $OC = OA \times OB$, alors $y^2 = 2x^2 + 1$ et donc $y = \sqrt{2x^2 + 1}$ puisque y est positif.